



# Analyse et approximation numérique de systèmes d'interaction fluide-structure et de modèles de champ-de-phase

Jean-Francois Scheid

## ► To cite this version:

Jean-Francois Scheid. Analyse et approximation numérique de systèmes d'interaction fluide-structure et de modèles de champ-de-phase. Mathématiques [math]. Université de Lorraine, 2014. tel-01096411

**HAL Id: tel-01096411**

**<https://hal.science/tel-01096411>**

Submitted on 17 Dec 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Université de Lorraine

Spécialité : Mathématiques.

présenté par

Jean-François SCHEID

**Analyse et approximation numérique de systèmes d'interaction fluide-structure  
et de modèles de champ-de-phase.**

Soutenu le 11 décembre 2014 devant le jury composé de

Georges-Henry COTTET	Rapporteur	Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
Max GUNZBURGER	Rapporteur	Professeur à l'Université d'État de Floride, USA.
Bertrand MAURY	Examineur	Professeur à l'Université Paris Sud, Orsay.
Olivier PIRONNEAU	Rapporteur	Professeur Émérite à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris.
Jacques RAPPAZ	Examineur	Professeur honoraire à l'EPFL, Suisse.
Jean-Pierre RAYMOND	Examineur	Professeur à l'Université Paul Sabatier, Toulouse.
Marius TUCSNAK	Examineur	Professeur à l'Université de Lorraine, Nancy.



# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Marius Tucsnak d'avoir suivi mes travaux effectués à l'IECN et présentés dans ce mémoire. Je tiens à exprimer ma gratitude pour les encouragements et la confiance qu'il m'a accordée notamment dans le co-encadrement d'une thèse. Je lui en suis très sincèrement reconnaissant.

Je suis très honoré que le Professeur Max Gunzburger soit membre de mon jury comme rapporteur de cette thèse (écrite en français!). Merci aux professeurs Olivier Pironneau et Georges-Henry Cottet d'avoir également accepté d'être rapporteurs et d'évaluer mon travail.

J'aimerais chaleureusement remercier Jacques Rappaz de m'avoir accueilli pendant 2 ans dans son équipe à l'EPFL en tant que post-doctorant. J'ai eu ainsi l'opportunité de travailler sur des modèles de champ-de-phase dans un contexte de travail chaleureux et très stimulant. J'ai particulièrement apprécié notre collaboration pendant ce séjour et je garde de cette période un souvenir très vif.

Enfin, je remercie Bertrand Maury et Jean-Pierre Raymond d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je n'oublie pas les nombreuses personnes de l'IECN qui m'ont aidé de près ou de loin dans mon travail. Un grand merci spécialement à Bruno, Takéo et Séraphin pour tous leurs conseils éclairés et leurs encouragements stimulants. Merci à Estelle et Stéphanie pour leur dévouement et leur aide précieuse à la bibliothèque du laboratoire.

Je ne saurais terminer ces remerciements sans saluer Pierre, Thierry, Dominique, Elise et Emile pour leur amitié et leur talent !



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>Publications</b>	<b>5</b>
<b>Notations</b>	<b>7</b>
 <b>I Systèmes d'interaction fluide-structure : approximations numériques et contrôle optimal</b>	 <b>9</b>
<b>1 Systèmes d'interaction fluide-rigide</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.1.1 Modélisation . . . . .	11
1.1.2 Formulation faible . . . . .	13
1.2 Méthode de Lagrange-Galerkin pour des densités homogènes . . . . .	16
1.2.1 Semi-discrétisation en temps . . . . .	17
1.2.2 Discrétisation complète espace-temps . . . . .	18
1.2.3 Estimation d'erreurs . . . . .	20
1.2.4 Système linéaire . . . . .	21
1.2.5 Méthode des caractéristiques d'ordre 2 . . . . .	27
1.2.6 Traitement de la pression . . . . .	28
1.3 Méthode de Lagrange-Galerkin pour des densités hétérogènes . . . . .	29
1.3.1 Méthode des caractéristiques modifiée et semi-discrétisation en temps . . . . .	29
1.3.2 Discrétisation complète espace-temps . . . . .	31
1.3.3 Système linéaire avec la caractéristique modifiée. . . . .	33
1.4 Résultats numériques . . . . .	35
 <b>2 Systèmes d'interaction fluide-déformable</b>	 <b>41</b>
2.1 Introduction et modélisation . . . . .	41
2.2 Formulation faible globale . . . . .	44
2.3 Méthodes de Lagrange-Galerkin . . . . .	45
2.3.1 Méthode standard des caractéristiques dans le cas déformable . . . . .	46
2.3.2 Méthode des caractéristiques modifiées pour le cas déformable . . . . .	47
2.4 Système linéaire . . . . .	48
2.5 Modèle de déformation pour la nage de poisson . . . . .	50
2.6 Résultats et simulations numériques . . . . .	53
2.7 Extension à la dimension 3 d'espace . . . . .	58
2.7.1 Modélisation . . . . .	58
2.7.2 Modèle de déformation . . . . .	60
2.7.3 Résultats numériques . . . . .	62

<b>3</b>	<b>Contrôle optimal pour l'autopropulsion à bas nombre de Reynolds</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction et modélisation . . . . .	65
3.2	Déformations radiales et contrôlabilité . . . . .	67
3.3	Solutions en temps minimal d'un problème linéarisé . . . . .	68
3.4	Résultats numériques . . . . .	72
<b>II</b>	<b>Analyse et approximation numérique de quelques modèles de champ-de-phase</b>	<b>75</b>
<b>4</b>	<b>Modèles de champ-de-phase pour des transitions de phase</b>	<b>77</b>
4.1	Modèles de champ-de-phase pour la solidification . . . . .	77
4.1.1	Existence, unicité, propriétés des solutions . . . . .	77
4.1.2	Approximations par Eléments Finis . . . . .	80
4.2	Modèles de séparation de phases . . . . .	86
<b>III</b>	<b>Perspectives</b>	<b>89</b>
1.	Méthodes des caractéristiques modifiées pour le cas déformable . . . . .	91
2.	Contrôle optimal pour la nage . . . . .	92
3.	Méthodes des <i>patches</i> et adaptation géométrique pour l'interaction fluide-structure . . . . .	93
4.	Estimations d'erreurs pour un problème de pénalisation des équations de Stokes avec un rigide . . . . .	95
5.	Optimisation de forme pour un système d'interaction fluide-structure . . . . .	96
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>

# Introduction

Ce manuscrit présente une synthèse de mes travaux de recherches. Il comporte essentiellement deux parties distinctes. La première partie est consacrée à l'étude de systèmes d'interaction fluide-structure. La deuxième partie porte sur les modèles de champ-de-phase pour des problèmes de transitions de phase. J'ai commencé à travailler sur les modèles de champ-de-phase lors d'un séjour post-doctoral à l'EPFL de Lausanne et j'ai continué à travailler un peu sur le sujet après avoir été recruté à Nancy. Je me suis ensuite éloigné de cette thématique pour m'orienter vers les problèmes d'interaction fluide-structure. Actuellement, les problèmes d'interaction fluide-structure constituent l'essentiel de mes thèmes de recherches.

La première partie de ce manuscrit porte sur l'analyse numérique de méthodes d'approximation de systèmes d'interaction fluide-structure ainsi que sur des questions associées de contrôle optimal. Les résultats de convergence et d'analyse d'erreurs sont obtenus pour une structure rigide. Les simulations numériques ont été réalisées pour des structures rigides et déformables, avec en particulier une application à la nage de poissons vue comme un phénomène d'auto-propulsion. Les questions de contrôle optimal traitées dans ce manuscrit concernent un problème de contrôle en temps minimal pour la nage à bas nombre de Reynolds.

Dans le Chapitre 1 de la première partie, je présente des méthodes d'approximation de type Lagrange-Galerkin pour un système d'interaction fluide-rigide. Ces méthodes "monobloc" sont basées sur une interprétation des termes inertiels des équations de Navier-Stokes incompressibles à l'aide d'une fonction caractéristique pour une formulation variationnelle globale du système. Les fonctions caractéristiques approchées des schémas d'approximation numériques sont construites différemment selon que les densités du fluide et du rigide sont égales ou pas. Des résultats de convergence et d'estimations d'erreurs pour une méthode d'Eléments Finis sont présentés. Ce chapitre regroupe les résultats des travaux réalisés dans [8], [4] (voir aussi [17], [16], [18]).

Le Chapitre 2 concerne l'étude d'un système d'interaction fluide-déformable. La structure immergée est à présent déformable, la déformation étant imposée une fois pour toute à la structure. Dans ce modèle bidimensionnel, la déformation n'est pas modifiée par l'écoulement du fluide. Ce modèle est une généralisation d'un système fluide-rigide. Une méthode d'approximation de type Lagrange-Galerkin est présentée avec une fonction caractéristique modifiée par rapport au cas rigide pour tenir compte de la déformation imposée. Les exemples numériques qui sont traités concernent la nage de poisson. Des modèles de déformation 2D et 3D pour la nage sont présentés et utilisés dans les différentes simulations numériques. La méthode présentée dans ce chapitre est détaillée dans [1].

Une problématique de contrôle optimal est abordée au Chapitre 3 pour un système d'autopropulsion à bas nombre de Reynolds. Les équations de Stokes sont couplées aux équations d'équilibre des forces hydrodynamiques, et on considère le cas d'une sphère soumise à des déformations axisymétrique et radiales. Ce système d'EDP se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires. L'étude d'un problème de contrôle en temps minimal est faite sur un problème linéarisé pour lequel des solutions optimales ont été obtenues de façon explicites. Ces solutions sont de natures différentes selon qu'on impose ou non une contrainte sur l'amplitude des déformations. Ce chapitre regroupe les résultats obtenus dans [3] et [2].



---

La deuxième partie du manuscrit est constituée du seul Chapitre 4 qui porte sur l'analyse et l'analyse numérique de modèles de champ-de-phase pour des problèmes de transitions de phase (solidification ou séparation de phases). J'ai travaillé à la fois sur des aspects d'analyse mathématique d'existence et d'unicité de solutions pour des modèles de solidification isotherme et de séparation de phases, mais également sur l'analyse numérique de méthodes d'approximation par Eléments Finis de ces problèmes (estimations d'erreurs *a priori*, estimations d'erreurs *a posteriori* pour l'adaptation de maillage). Ce chapitre synthétise l'ensemble des travaux qui ont été développés dans [13], [12], [11], [10], [9] (voir aussi [21], [20]).

Enfin, je termine le manuscrit par un ensemble de perspectives de recherches regroupées dans une troisième partie. Ces perspectives portent sur les problèmes d'interaction fluide-structure. Je présente des perspectives qui sont pour certaines immédiates et qui s'inscrivent plus dans des travaux en cours. D'autres perspectives sont à plus long terme, j'ai voulu cependant les présenter de façon assez précise et détaillée.

# Publications

## Revue internationale avec comité de lecture

- [1] J.S. SAN MARTÍN, J.-F. SCHEID, L. SMARANDA, *The Lagrange-Galerkin method for fluid-structure interaction problems*, Boundary Value Problems (2013) 2013–246. (citation pages 3, 41, 46, 47 et 91).
- [2] J. LOHÉAC, J.-F. SCHEID, *Time optimal control for non-holonomic system with state constraint*, Math. Control Relat. Fields 3 (2013), no. 2, 185–208. (citation pages 3, 65, 66, 66, 69, 69, 69, 69 et 71).
- [3] J. LOHÉAC, J.-F. SCHEID, M. TUCSNAK, *Controllability and time optimal control for low Reynolds numbers swimmers*, Acta Appl. Math., 123 (2013), 175–200. (citation pages 3, 65, 66, 66, 66, 67, 68, 68, 68, 68, 69, 69, 71 et 71).
- [4] J.S. SAN MARTÍN, J.-F. SCHEID, L. SMARANDA, *A modified Lagrange-Galerkin method for a fluid-rigid system with discontinuous density*, Numer. Math. 122 (2012), no. 2, 341–382. (citation pages 3, 11, 30 et 32).
- [5] P. FULMANSKI, A. LAURAIN, J.-F. SCHEID, J. SOKOŁOWSKI, *Level set method with topological derivatives in shape optimization*, Int. J. Comput. Math. 85 (2008), no. 10, 1491–1514. (citation page 97).
- [6] J.S. SAN MARTÍN, J.-F. SCHEID, T. TAKAHASHI, M. TUCSNAK, *An initial and boundary value problem modeling fish-like swimming*, Arch. Ration. Mech. Anal., vol. 188 (2008), no. 3, 429–455. (citation pages 14, 41, 41, 44, 45, 46 et 51).
- [7] P. FULMANSKI, A. LAURAIN, J.-F. SCHEID, J. SOKOŁOWSKI, *A levelset method in shape and topology optimization for variational inequalities*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 17 (2007), no. 3, 413–430. (citation page 97).
- [8] J.S. SAN MARTÍN, J.-F. SCHEID, T. TAKAHASHI, M. TUCSNAK, *Convergence of the Lagrange-Galerkin method for the equations modelling the motion of a fluid-rigid system*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 43 (2005), no. 4, 1536–1571. (citation pages 3, 11, 19, 20 et 20).
- [9] D. KESSLER, J.-F. SCHEID, G. SCHIMPERNA, U. STEFANELLI, *Study of a system for the isothermal separation of components in a binary alloy with change of phase*, IMA J. Appl. Math. 69, no. 3, 233–257 (2004). (citation pages 4, 86, 87 et 87).
- [10] J.-F. SCHEID, *Global solutions to a degenerate solutal phase-field model for the solidification of binary alloy*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 5, no. 1, 207–217 (2004). (citation pages 4, 77, 80 et 80).
- [11] O. KRUEGER, M. PICASSO, J.-F. SCHEID, *A posteriori error estimates and adaptive finite elements for a nonlinear parabolic problem related to solidification*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 192, pp. 535–558 (2003). (citation pages 4, 77, 77, 80, 82, 83, 83 et 84).

- [12] D. KESSLER, J.-F. SCHEID, *A priori error estimates of a finite element method for an isothermal phase-field model related to the solidification process of a binary alloy*, IMA J. Numer. Anal., vol. 22, pp. 281-305 (2002). (citation pages 4, 77, 80, 80, 82 et 82).
- [13] J. RAPPAZ, J.-F. SCHEID, *Existence of solutions to a phase-field model for the isothermal solidification process of binary alloys*, Math. Meth. Appl. Sci., vol. 23, No. 6, pp. 491-513 (2000). (citation pages 4, 77, 77, 78 et 78).
- [14] F. ABERGEL, D. HILHORST, F. ISSARD-ROCH, J.-F. SCHEID, *Local existence and uniqueness of a Stefan problem with surface tension*, Applicable Analysis, vol. 60, pp. 219-240 (1996).
- [15] J.-F. SCHEID, *On a dissolution-growth problem with surface tension : Local existence and uniqueness*, Appl. Math. Lett., vol. 8, No. 2, pp. 91-96 (1995).

## Comptes rendus

- [16] J.S. SAN MARTÍN, J.-F. SCHEID, L. SMARANDA, *A time discretization scheme of a characteristics method for a fluid-rigid system with discontinuous density*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, vol. 348, 935–939 (2010). (citation pages 3 et 11).
- [17] J.S. SAN MARTÍN, J.-F. SCHEID, T. TAKAHASHI, M. TUCSNAK, *Convergence of the Lagrange-Galerkin method for the equations modelling the motion of a fluid-rigid system*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004). (citation pages 3 et 11).

## Actes de congrès avec comité de lecture

- [18] J.S. SAN MARTÍN, J.-F. SCHEID, L. SMARANDA, *Convergence of a discretization scheme based on characteristics method for a fluid-rigid system*, in Proc. Eleventh International Conference on Integral Methods in Science and Engineering (IMSE2010), Brighton, England, 2011. (citation pages 3, 11 et 32).
- [19] P. FULMANSKI, A. LAURAIN, J.-F. SCHEID, *A level set method for the shape optimization of a Signorini problem*, 10th IEEE Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, Poland, Sept. 2004, pp. 71-75 (2004).
- [20] J.-F. SCHEID, G. SCHIMPERNA, *Regularity and uniqueness results for a phase change problem in binary alloys*, Elliptic and parabolic problems (Rolduc/Gaeta, 2001), 475–484, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2002). (citation pages 4, 86 et 87).
- [21] D. KESSLER, O. KRUEGER, J. RAPPAZ, J.-F. SCHEID, *A phase-field model for the isothermal solidification of a binary alloy*, Comput. Assist. Mech. Eng. Sci., 7 : 279-288, 2000 (proceedings of PCC99 Workshop, Varsovie, 1999). (citation pages 4, 77 et 79).

# Notations

- $\mathbf{x}^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$  pour  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .
- Produit scalaire  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  ou bien  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  entre les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\mathbb{R}^n$ ;  $|\mathbf{x}|$  ou  $|\mathbf{x}|_2$  est la norme euclidienne de  $\mathbf{x}$ .
- Produit scalaire  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$  entre  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v} \in L^2(\mathcal{O})^2$ .
- Double produit scalaire  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{Trace}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})$  entre les matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ;  $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$  est la norme matricielle correspondante.
- Produit scalaire  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{A} : \mathbf{B} \, d\mathbf{x}$  entre deux matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L^2(\mathcal{O}, \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$ .
- Dérivées première et seconde  $w'$  et  $w''$  d'une fonction  $w$  dépendant seulement du temps  $t$ .
- Tenseur symétrique des déformations  $D(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) / 2$  avec  $\nabla \mathbf{u}^\top$  matrice transposée de  $\nabla \mathbf{u}$ .
- Tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma(\mathbf{x}, t) = 2\nu D(\mathbf{u}) - p(\mathbf{x}, t)\text{Id}$  avec  $\nu > 0$  viscosité.
- *Espaces fonctionnels.*

$B(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  désigne le solide (rigide ou déformable) dont le centre de masse est  $\boldsymbol{\xi}$  et l'angle d'orientation  $\theta$ .

- Espace des fonctions de carré intégrable, à moyenne nulle

$$L_0^2(\mathcal{O}) = \left\{ f \in L^2(\mathcal{O}) \mid \int_{\mathcal{O}} f \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

- Espace des fonctions rigides dans  $B(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  à divergence nulle dans tout le domaine  $\mathcal{O}$

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\mathcal{O})^2 \mid D(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } B(\boldsymbol{\xi}, \theta) \right\},$$

- Espace des fonctions rigides dans  $B(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  à divergence nulle dans tout le domaine  $\mathcal{O}$ ,

$$\widehat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta) \mid \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \right\},$$

- Espace pour la pression

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \left\{ p \in L_0^2(\mathcal{O}) \mid p = 0 \text{ dans } B(\boldsymbol{\xi}, \theta) \right\}.$$

- $\mathbf{I}_{n_1}$  : matrice identité d'ordre  $n_1$   
 $\mathbf{0}_{n_1, n_2}$  : matrice nulle de taille  $n_1 \times n_2$   
 $\mathbf{0}_{n_1}$  : vecteur nul de  $\mathbb{R}^{n_1}$ .



## Première partie

# Systemes d'interaction fluide-structure : approximations numériques et contrôle optimal



# Chapitre 1

## Systèmes d'interaction fluide-rigide

### 1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'approximation d'un système fluide-rigide. Le fluide est supposé visqueux et incompressible et l'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes incompressible. La modélisation est d'abord présentée dans le cas de la dimension 2 d'espace. Une extension à la dimension 3 sera donnée à la fin du chapitre suivant pour le cas d'une structure déformable. La méthode d'approximation présentée et étudiée dans ce chapitre repose essentiellement sur une formulation variationnelle globale du problème correspond au système complet fluide-rigide. C'est cette formulation globale qui est discrétisée, conduisant ainsi à une méthode d'approximation souvent qualifiée de "monobloc" ou bien encore de "monolithique" dans la mesure où l'écoulement du fluide (vitesse et pression du fluide) et la vitesse de déplacement du rigide sont calculées simultanément. D'autre part, les termes inertiels des équations de Navier-Stokes sont formulés à l'aide d'une dérivée particulaire faisant intervenir une fonction caractéristique. L'approximation en espace est réalisée par une méthode d'Eléments Finis (Galerkin) avec une discrétisation temporelle de la dérivée particulaire (Lagrange). Les méthodes proposées sont donc de type Lagrange-Galerkin. Les fonctions caractéristiques approchées sont construites différemment selon que la densité du fluide  $\rho_f$  est égale ou non à la densité du solide  $\rho_s$ . Ce chapitre présente les résultats obtenus dans [8], [4] (voir aussi [17], [16], [18]).

#### 1.1.1 Modélisation

Le système fluide-rigide est décrit en dimension 2 d'espace. Ce système occupe un domaine borné  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$  de bord régulier  $\partial\mathcal{O}$ . Le corps rigide occupe à l'instant  $t$  un sous-ensemble compact connexe  $B(t) \subset \mathcal{O}$  de bord régulier  $\partial B(t)$ . Le corps rigide est immergé dans le fluide qui remplit le domaine  $F(t) = \mathcal{O} \setminus B(t)$ . La dynamique du fluide est décrite par les équations de Navier-Stokes incompressibles et le mouvement du corps rigide obéit aux lois fondamentales de la dynamique à travers les équations des bilans des moments linéaires et angulaires (lois de Newton). En ce qui concerne l'écoulement du fluide, les inconnues sont la vitesse eulérienne  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et la pression du fluide  $p(\mathbf{x}, t)$  à l'instant  $t$  et en un point  $\mathbf{x} \in F(t)$ . Les autres inconnues sont la position  $\boldsymbol{\xi}(t)$  du centre de masse du rigide  $B(t)$  et  $\theta(t)$  son angle d'orientation par rapport à l'axe horizontal passant par le centre de masse (cf. Figure 1.1). Le système fluide-rigide s'écrit, pour  $t \in [0, T]$ ,

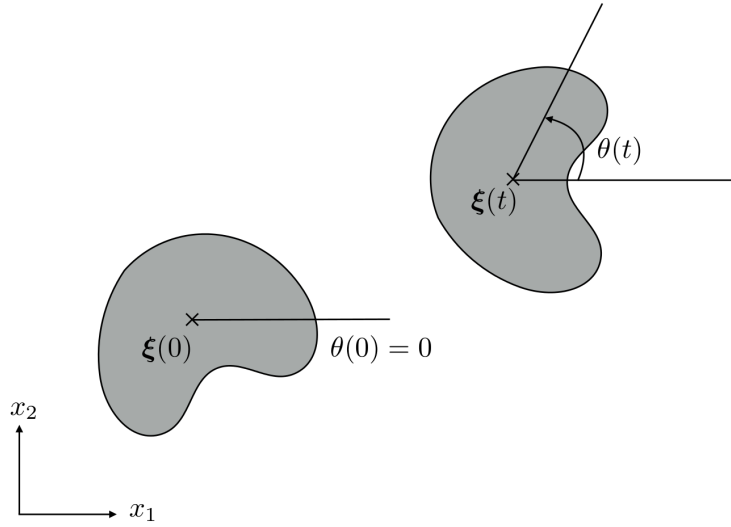
$$\rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho_f \mathbf{f} \quad \text{dans } F(t), \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } F(t), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}'(t) + \theta'(t)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp \quad \text{sur } \partial B(t), \quad (1.4)$$



FIGURE 1.1 – Position du rigide à l'instant initial (gauche) et à l'instant  $t$  (droite)

$$m\boldsymbol{\xi}''(t) = - \int_{\partial B(t)} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\Gamma + \rho_s \int_{B(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (1.5)$$

$$J\theta''(t) = - \int_{\partial B(t)} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\Gamma + \rho_s \int_{B(t)} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (1.6)$$

Les conditions initiales du système (1.1)-(1.6) sont données par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in F(0), \quad (1.7)$$

$$\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\xi}'(0) = \boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{R}^2, \quad \theta(0) = \theta_0 = 0, \quad \theta'(0) = \omega_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Les constantes positives  $\rho_f$  et  $\rho_s$  désignent respectivement les densités du fluide et du corps rigide,  $\nu > 0$  est la viscosité du fluide. Les constantes  $m$  et  $J$  sont la masse et le moment d'inertie du corps rigide définies par

$$m = \int_{B(t)} \rho_s d\mathbf{x}, \quad J = \int_{B(t)} \rho_s |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)|^2 d\mathbf{x}, \quad (1.9)$$

et elles sont indépendantes du temps  $t$ , la masse et le moment d'inertie étant conservés au cours du temps. Par ailleurs,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  est la force extérieure exercée sur le fluide et le corps rigide (force par unité de masse).

Pour tout  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , on a noté  $\mathbf{x}^\perp$  le vecteur  $\mathbf{x}^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ . Le tenseur des contraintes (tenseur de Cauchy) est défini par

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = 2\nu D(\mathbf{u}) - p(\mathbf{x}, t) \text{Id}, \quad (1.10)$$

où  $\text{Id}$  est la matrice identité  $2 \times 2$  et  $D(\mathbf{u})$  est le tenseur symétrique des déformations donné par  $D(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) / 2$  où  $\nabla \mathbf{u}^\top$  désigne la matrice transposée de  $\nabla \mathbf{u}$ . Le corps rigide  $B(t)$  est défini par

$$B(t) = \{R_{\theta(t)}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}(0)) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad \mathbf{y} \in B(0)\},$$

où  $R_\theta$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta$ . Par ailleurs, on a noté  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  le vecteur unitaire normal au bord  $\partial B(t)$  à l'instant  $t$  et au point  $\mathbf{x}$ , dirigé vers l'intérieur du corps rigide.

Le système d'interaction fluide-rigide (1.1)–(1.8) est caractérisé par le fort couplage entre les équations nonlinéaires dans le fluide et les équations de la dynamique du solide rigide. D'autre part,

les équations de Navier-Stokes sont écrites dans un domaine qui varie avec le temps et dépend de la position du solide rigide. Ces deux éléments constituent des difficultés essentielles à la fois pour établir le caractère bien posé du système (1.1)–(1.8) mais aussi du point de vue de son approximation numérique.

L'existence de solutions de ce type de système a été étudié depuis plus de dix ans dans de nombreux articles parmi lesquels on peut citer Desjardins-Esteban [DE00], Gunzburger-Lee-Seregin [GLS00], SanMartín-Starovoitov-Tucsnak [SMST02], Grandmont-Maday [GM00], Takahashi [TT04], [Tak03].

Du point de vue de l'approximation numérique de ce type de système d'interaction fluide-rigide, plusieurs approches ont été développées. Les méthodes ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) consistent à chaque pas de temps, à déformer le maillage avec une vitesse arbitraire dans le fluide en suivant le déplacement du solide rigide. Les équations de Navier-Stokes sont alors résolues sur un domaine de référence qui ne dépend plus du temps (typiquement le domaine fluide à l'itération précédente). Cette approche a été utilisée par Grandmont-Guimet-Maday [GGM01] (pour un problème 1D), Formaggia-Nobile [FN99], Gastaldi [Gas01], Farhat-Geuzaine-Grandmont [FGG01], Maury [Mau96], Maury-Glowinski [MG97], Duarte-Gormaz-Natesan [DGN04].

Dans les méthodes ALE, les calculs des vitesses du fluide et du solide rigide sont généralement réalisées de façon découplés. Un autre type de méthode consiste précisément à ne pas séparer ces calculs et à calculer les vitesses du fluide et du rigide de façon *simultanée* en utilisant généralement une formulation globale qui porte sur l'ensemble du domaine fluide-rigide. Ces méthodes sont qualifiées de *monobloc*. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer les méthodes de domaines fictifs (*fictitious domain method*), les méthodes de pénalisation et enfin la méthode globale des caractéristiques présentée dans ce manuscrit. Les méthodes de domaines fictifs consistent à remplir fictivement le domaine rigide par le fluide et de relâcher la contrainte de rigidité en introduisant des multiplicateurs de Lagrange, voir Glowinski-Pan-Hesla-Joseph-Périaux [GPH<sup>+</sup>00, GPH<sup>+</sup>01]). Les méthodes d'Eléments Finis étendus (*extended Finite Elements* XFEM) ont été adaptées aux problèmes d'interactions fluide-rigide avec une approche de domaine fictif (voir Court-Fournié-Lozinski [CFL14], Gerstenberger-Wall [GW08]) où les multiplicateurs de Lagrange sont identifiés avec la trace normale du tenseur de Cauchy sur l'interface fluide-rigide.

Les méthodes de pénalisation sont basées également sur une formulation globale fluide-rigide en pénalisant la contrainte de rigidité sur la vitesse à l'aide d'un terme dépendant d'un petit paramètre  $\varepsilon$ . Le terme de pénalisation force la vitesse à devenir rigide dans le solide quand  $\varepsilon$  tend vers 0 (voir Angot-Bruneau-Fabrie [ABF99], Coquerelle-Cottet [CC08], Bost-Cottet-Maitre [BCM10], Janelas-Lefebvre-Maury [JLM05]). Parmi les méthodes monobloc, citons enfin les méthodes de frontières immergées (*immersed boundary method*), où des termes de forces équivalentes sont ajoutés dans les équations du fluide afin de représenter l'interaction entre le fluide et la structure (cf. Peskin [Pes02], Mittal-Iaccarino [MI05]). Les méthodes de frontières immergées peuvent aussi être couplées à des méthodes *LevelSet* pour prendre en compte de façon implicite l'évolution de l'interface fluide-structure comme par exemple dans [CM06] où des membranes élastiques sont immergées dans un fluide visqueux incompressible (voir aussi [CMM08] où une membrane élastique sépare deux fluides homogènes incompressibles).

### 1.1.2 Formulation faible

Commençons par introduire quelques notations ainsi que les espaces fonctionnels utiles par la suite.

**Notations.** Le produit scalaire dans  $L^2(\mathcal{O})^2$  sera noté

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\mathcal{O})^2. \quad (1.11)$$

Pour toutes matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , on définit le double produit scalaire  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{Trace}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B})$  et par  $|\mathbf{A}|$  la norme correspondante. Par convention, les mêmes notations sont utilisées pour les produits scalaires dans  $L^2(\mathcal{O})^2$  et dans  $L^2(\mathcal{O}, \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$ , c'est-à-dire

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{A} : \mathbf{B} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in L^2(\mathcal{O}, \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})).$$

**Espaces fonctionnels.** On notera  $L_0^2(\mathcal{O})$  l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\mathcal{O}$  à moyenne nulle,

$$L_0^2(\mathcal{O}) = \left\{ f \in L^2(\mathcal{O}) \mid \int_{\mathcal{O}} f \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

On notera  $B(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  le corps rigide dont le centre de masse est  $\boldsymbol{\xi}$  et l'angle d'orientation  $\theta$  (cf. Figure 1.1). On introduit alors l'espace des fonctions rigides dans  $B(\boldsymbol{\xi}, \theta)$ ,

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\mathcal{O})^2 \mid \mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } B(\boldsymbol{\xi}, \theta) \right\}, \quad (1.12)$$

ainsi que l'espace des fonctions rigides dans  $B(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  à divergence nulle dans tout le domaine  $\mathcal{O}$ ,

$$\widehat{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta) \mid \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \right\}, \quad (1.13)$$

et enfin l'espace pour la pression

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \left\{ p \in L_0^2(\mathcal{O}) \mid p = 0 \text{ dans } B(\boldsymbol{\xi}, \theta) \right\}. \quad (1.14)$$

Pour établir une formulation variationnelle du système (1.1)-(1.8), on a besoin de définir des espaces fonctionnels dont le domaine spatial dépend du temps. Soient  $\boldsymbol{\xi} \in H^2((0, T); \mathbb{R}^2)$ ,  $\theta \in H^2((0, T); \mathbb{R})$  deux fonctions telles que  $B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)) \subset \mathcal{O}$  avec  $\text{dist}(B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \partial\mathcal{O}) > 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . On notera désormais lorsqu'il n'y a pas de confusion,  $B(t) = B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t))$  et de même le domaine fluide correspondant  $F(t) = F(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)) = \mathcal{O} \setminus B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t))$ .

Soit  $\Psi : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application telle que, pour tout  $t \in [0, T]$ , la fonction  $\Psi(\cdot, t)$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $B(0) = B(\boldsymbol{\xi}(0), \theta(0))$  dans  $B(t) = B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t))$  et telle que les dérivées

$$\frac{\partial^{i+k_1+k_2} \Psi}{\partial t^i \partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2}}, \quad i \leq 1, \quad k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0$$

existent et sont continues. Pour l'existence d'une telle fonction  $\Psi$ , voir [Tak03], [6]. L'intérêt principal de cette fonction est de transformer les équations de Navier-Stokes posées dans le domaine  $F(t)$  dépendant du temps en un système d'EDP posées dans un domaine fixe. On note

$$F_T = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T) ; x \in F(t) \right\}.$$

Pour  $v \in L^2(F_T)^k$  avec  $k \in \{1, 2\}$ , on définit la fonction  $v_\Psi$  par :

$$v_\Psi : F(0) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (y, t) \mapsto v(\Psi(y, t), t).$$

On est alors en mesure de définir les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} L^2(0, T; H^2(F(t)))^2 &= \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v}_\Psi \in L^2(0, T; H^2(F(0)))^2 \}, \\ H^1(0, T; L^2(F(t)))^2 &= \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v}_\Psi \in H^1(0, T; L^2(F(0)))^2 \}, \\ C([0, T]; H^1(F(t)))^2 &= \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u}_\Psi \in C([0, T]; H^1(F(0)))^2 \}, \\ L^2(0, T; H^1(F(t))) &= \{ p \mid p_\Psi \in L^2(0, T; H^1(F(0))) \}. \end{aligned}$$

**Fonction densité.** On introduit la fonction densité  $\rho$  définie sur tout le domaine  $\mathcal{O}$  et constante par morceaux. Pour  $t \in [0, T]$  et  $\boldsymbol{\xi}(t)$ ,  $\theta(t)$  satisfaisant le système (1.1)-(1.8), on définit

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \rho_s & \text{si } \mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \\ \rho_f & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \setminus B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)). \end{cases} \quad (1.15)$$

**Fonction caractéristique.** La formulation faible du système (1.1)-(1.8) que l'on donne plus loin, est basée sur l'écriture des termes inertiels dans les équations de Navier-Stokes avec une dérivée particulaire. Plus précisément, on introduit la fonction caractéristique dont les lignes de niveaux sont les courbes intégrales du champ de vitesse (voir par exemple [Pir82], [Sül88]). La fonction caractéristique  $\boldsymbol{\psi} : [0, T]^2 \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  est définie comme la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}(t; s, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\psi}(t; s, \mathbf{x}), t) & \forall t \in [0, T], \\ \boldsymbol{\psi}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (1.16)$$

La dérivée matérielle  $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  de la vitesse  $\mathbf{u}$  à l'instant  $t_0$  satisfait

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}, t_0) = \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(\boldsymbol{\psi}(t; t_0, \mathbf{x}), t)]|_{t=t_0}. \quad (1.17)$$

La caractéristique  $\boldsymbol{\psi}(t; s, \mathbf{x})$  représente la position à l'instant  $t$  d'une particule soumise au champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et qui est en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $s$  (cf. Figure 1.2).

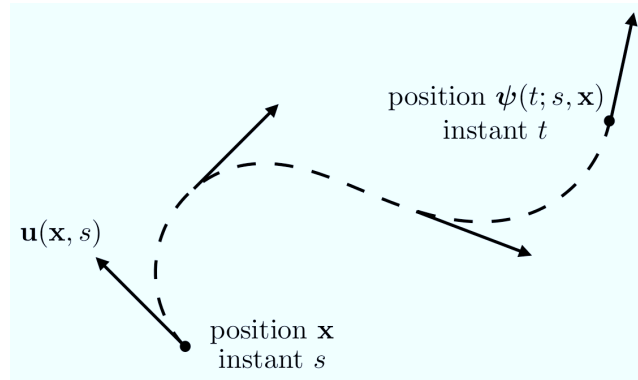


FIGURE 1.2 – Interprétation géométrique de la fonction caractéristique

**Formulation variationnelle.** Pour établir une formulation variationnelle globale, on utilise la caractérisation suivante des fonctions rigides (voir Temam [Tem83, Lemme 1.1, p.18]). Pour tout  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$ , il existe  $\mathbf{l}_u \in \mathbb{R}^2$  et  $\omega_u \in \mathbb{R}$  tels que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_u + \omega_u (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^\perp, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}, \theta). \quad (1.18)$$

On obtient alors la décomposition suivante, pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$ ,

$$(\rho \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{O} \setminus B(\boldsymbol{\xi}, \theta)} \rho_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + M \mathbf{l}_u \cdot \mathbf{l}_v + J \omega_u \omega_v. \quad (1.19)$$

En utilisant la relation (1.19), on obtient la formulation variationnelle du système (1.1)-(1.8).

**Proposition 1.1.1** *Soient*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; H^2(F(t))^2) \cap H^1(0, T; L^2(F(t))^2) \cap C([0, T]; H^1(F(t))^2), \\ p &\in L^2(0, T; H^1(F(t))), \quad \boldsymbol{\xi} \in H^2(0, T)^2, \quad \theta \in H^2(0, T). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , on suppose que  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  et  $p(\cdot, t)$  sont étendues à tout le domaine  $\mathcal{O}$  par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\xi}'(t) + \omega(t)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \quad (1.21)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)). \quad (1.22)$$

Alors  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \theta)$  est la solution du système (1.1)-(1.8) si et seulement si pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t))$ ,  $p(\cdot, t) \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t))$  et  $(\mathbf{u}, p)$  vérifient pour presque tout  $t \in (0, T)$ ,

$$\left( \rho \frac{d}{dt} [\mathbf{u} \circ \boldsymbol{\psi}](t), \boldsymbol{\varphi} \right) + a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p) = (\rho \mathbf{f}(t), \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \quad (1.23)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \quad (1.24)$$

où

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu \int_{\mathcal{O}} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\mathcal{O})^2 \quad (1.25)$$

et

$$b(\mathbf{u}, p) = - \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div}(\mathbf{u}) p \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O})^2, \quad \forall p \in L_0^2(\mathcal{O}). \quad (1.26)$$

Takahashi [Tak03] a établi l'existence et l'unicité de solution forte du système (1.1)-(1.8) possédant la régularité (1.20). On supposera désormais dans tout le chapitre que  $\mathbf{f}$  et la donnée initiale  $\mathbf{u}_0$  vérifient

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &\in C([0, T]; H^1(\mathcal{O})^2), \quad \mathbf{u}_0 \in H^2(F(0))^2, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}_0) = 0 \text{ dans } F(0), \\ \mathbf{u}_0 &= 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_1 + \omega_0(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_0)^\perp \text{ sur } \partial B(\boldsymbol{\xi}_0, \theta_0), \end{aligned} \quad (1.27)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  et  $F(0) = \mathcal{O} \setminus B(\boldsymbol{\xi}_0, \theta_0)$ . On supposera également que la solution correspondante  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \theta)$  du système (1.1)-(1.8) satisfait

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in C([0, T]; H^2(F(t))^2) \cap H^1(0, T; L^2(F(t))^2), \\ D^2 \mathbf{u} / Dt^2 \in L^2(0, T; L^2(F(t))^2), \quad \mathbf{u} \in C([0, T]; C^{0,1}(\overline{\mathcal{O}}))^2 \\ p \in C([0, T]; H^1(F(t))), \quad \boldsymbol{\xi} \in H^3(0, T)^2, \quad \theta \in H^3(0, T) \end{cases} \quad (1.28)$$

et

$$\operatorname{dist}(B(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \partial\mathcal{O}) > 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.29)$$

On remarque que la formulation (1.23)-(1.24) fait intervenir uniquement des intégrales sur le domaine  $\mathcal{O}$  tout entier. La différence avec une formulation variationnelle pour les équations de Navier-Stokes standards (sans structure) réside dans les espaces fonctionnels de la solution et des fonctions tests. C'est à partir de la formulation globale (1.23)-(1.24) que l'on va construire et étudier des schémas d'approximation.

## 1.2 Méthode de Lagrange-Galerkin pour des densités homogènes

Dans cette section, on considère le cas où les densités du fluide et du corps rigide sont égales i.e.  $\rho_f = \rho_s = 1$ . Il ne s'agit pas ici d'une hypothèse simplificatrice mais en réalité les estimations d'erreurs obtenues dans cette section reposent de façon cruciale sur l'égalité des densités fluide/rigide. Nous reviendrons sur cet aspect à la section suivante en indiquant les difficultés rencontrées pour traiter le cas hétérogène  $\rho_f \neq \rho_s$  et la nécessité de modifier le schéma numérique (plus précisément de modifier la fonction caractéristique approchée) pour obtenir un résultat de convergence dans le cas hétérogène.

### 1.2.1 Semi-discrétisation en temps

A partir de la formulation variationnelle (1.23)-(1.24), on établit un schéma de semi-discrétisation en temps. Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\Delta t = T/N$  et  $t_k = k\Delta t$  pour  $k = 0, \dots, N$ . On désigne par  $(\mathbf{u}^k, p^k, \boldsymbol{\xi}^k, \theta^k) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k) \times \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k) \times \mathcal{O} \times [0, 2\pi]$  l'approximation de la solution du système (1.1)-(1.8) à l'instant  $t = t_k$  et on souhaite déterminer l'approximation  $(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}, \boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}) \times \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}) \times \mathcal{O} \times [0, 2\pi]$  à l'instant suivant  $t = t_{k+1}$ . Pour  $k = 0$ , on définit

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\xi}^0 = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \theta^0 = \theta_0 = 0, \quad (1.30)$$

où les données initiales  $\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\xi}_0$  vérifient (1.27).

**Calcul de la nouvelle position  $(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1})$ .** On approche tout d'abord la position du centre de masse  $\boldsymbol{\xi}^{k+1}$  et l'angle d'orientation  $\theta^{k+1}$  du rigide à l'instant  $t_{k+1}$ , en calculant

$$\boldsymbol{\xi}^{k+1} = \boldsymbol{\xi}^k + \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k)\Delta t, \quad (1.31)$$

$$\theta^{k+1} = \theta^k + \frac{\Delta t}{J} \int_{B(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k)} (\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k)) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^k)^\perp d\mathbf{x}. \quad (1.32)$$

**Calcul de la vitesse  $\mathbf{u}^{k+1}$  et de la pression  $p^{k+1}$ .** On définit la fonction caractéristique approchée  $\overline{\psi}$  associée à la vitesse approchée comme la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overline{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^k(\overline{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x})), & \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \overline{\psi}(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad (1.33)$$

et on note

$$\overline{\mathbf{X}}^k(\mathbf{x}) = \overline{\psi}(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \quad (1.34)$$

La fonction  $\overline{\mathbf{X}}^k$  laisse invariant le domaine  $\mathcal{O}$  i.e.  $\overline{\mathbf{X}}^k(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ . La caractéristique  $\overline{\mathbf{X}}^k(\mathbf{x})$  représente la position approchée à l'instant  $t_k$  d'une particule qui est en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t_{k+1}$ .

**Schéma de discrétisation en temps.** On détermine la solution  $(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}) \times \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1})$  du problème de Stokes sous la forme mixte suivante :

$$\left( \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \circ \overline{\mathbf{X}}^k}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right) + a(\mathbf{u}^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p^{k+1}) = (\mathbf{f}^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}), \quad (1.35)$$

$$b(\mathbf{u}^{k+1}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}), \quad (1.36)$$

où les formes bilinéaires  $a$  et  $b$  sont données par (1.25),(1.26).

La formulation mixte (1.35),(1.36) est bien posée pourvu que les espaces  $\mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$ ,  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  et la forme bilinéaire  $b$  satisfassent une condition *inf-sup* (voir, par exemple [GR79, Corollary I.4.1., p.61]). Cette condition inf-sup est satisfaite et elle est donnée par le résultat suivant, assurant ainsi l'existence et l'unicité de la solution  $(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}) \times \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1})$  de (1.35),(1.36).

**Lemme 1.2.1** *Soit  $(\boldsymbol{\xi}, \theta) \in \mathcal{O} \times [0, 2\pi]$  tel que  $\text{dist}(B(\boldsymbol{\xi}, \theta), \partial\mathcal{O}) = \eta$  avec  $\eta > 0$ . Alors, il existe une constante  $\beta > 0$  dépendante seulement de  $\eta$  et de  $\mathcal{O}$ , telle que pour tout  $q \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$ , il existe  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  vérifiant*

$$\int_{\mathcal{O}} \text{div}(\mathbf{u}) q d\mathbf{x} \geq \beta \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \|q\|_{L^2(\mathcal{O})}. \quad (1.37)$$

La preuve de ce résultat est obtenue par des modifications mineures de la démonstration faite pour les équations de Stokes standards en formulation mixte (voir, par exemple [GR79, p.81]).

### 1.2.2 Discrétisation complète espace-temps

Afin de discrétiser en espace le problème (1.35),(1.36), on construit deux espaces d'Eléments Finis qui approchent  $\mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  et  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  définis par (1.12) et (1.14).

Le domaine  $\mathcal{O}$  est supposé polygonal. On considère une triangulation quasi-uniforme  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\mathcal{O}$  tout entier, avec le paramètre de discrétisation  $0 < h < 1$  représentant la taille du maillage i.e.

$$\overline{\mathcal{O}} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K. \quad (1.38)$$

Si  $K \in \mathcal{T}_h$  est un triangle de sommets  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ , on désigne par  $\lambda_1^K(\mathbf{x}), \lambda_2^K(\mathbf{x})$  et  $\lambda_3^K(\mathbf{x})$  les coordonnées barycentriques de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  par rapport aux sommets  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ . A la triangulation  $\mathcal{T}_h$ , on associe deux espaces d'approximation classiques d'Eléments Finis mixtes pour le système de Stokes. On introduit tout d'abord  $W_h \subset H_0^1(\mathcal{O})^2$ , l'espace d'Eléments Finis  $\mathbb{P}_1$ -bulle pour le champ de vitesse associé à  $\mathcal{T}_h$ . On a  $W_h = V_h \times V_h$  avec

$$V_h = \{v \in C^0(\overline{\mathcal{O}}) \mid v = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}; v|_K \in \text{span}(\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K, \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (1.39)$$

Pour la pression, on introduit l'espace d'Eléments Finis  $E_h$  des fonctions  $\mathbb{P}_1$ ,

$$E_h = \{q \in C(\overline{\mathcal{O}}) \mid q|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (1.40)$$

On définit alors les espaces d'Eléments Finis suivants pour une approximation conforme du système fluide-rigide : pour tout  $(\boldsymbol{\xi}, \theta) \in \mathcal{O} \times [0, 2\pi]$ ,

$$\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}, \theta) = W_h \cap \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \theta), \quad (1.41)$$

$$\mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}, \theta) = E_h \cap \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}, \theta). \quad (1.42)$$

Afin de définir la caractéristique approchée dans le cadre de la discrétisation complète en espace et en temps, on définit l'espace d'Eléments Finis suivant (voir [Pir82]) :

$$\mathcal{R}_h = \{\mathbf{rot}(\varphi_h), \varphi_h \in E_h, \varphi_h = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}\}, \quad (1.43)$$

avec  $\mathbf{rot}(\varphi_h) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_1} \end{pmatrix}$ . On introduit la projection orthogonal  $\mathbf{P}$  de  $L^2(\mathcal{O})^2$  dans  $\mathcal{R}_h$  :

si  $\mathbf{u} \in L^2(\mathcal{O})^2$  alors  $\mathbf{Pu} \in \mathcal{R}_h$  est l'unique solution de l'équation

$$(\mathbf{u} - \mathbf{Pu}, \mathbf{r}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{r}_h \in \mathcal{R}_h. \quad (1.44)$$

On suppose qu'on connaît l'approximation  $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k, \boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) \times \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) \times \mathcal{O} \times [0, 2\pi]$  de la solution du système (1.1)-(1.8) à l'instant  $t = t_k$  et on souhaite déterminer l'approximation  $(\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}, \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}) \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}) \times \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}) \times \mathcal{O} \times [0, 2\pi]$  à l'instant  $t = t_{k+1}$ .

**Calcul de la nouvelle position  $(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$ .** On approche la position du centre de masse  $\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}$  et l'angle d'orientation  $\theta_h^{k+1}$  du rigide à l'instant  $t_{k+1}$ , en calculant

$$\boldsymbol{\xi}_h^{k+1} = \boldsymbol{\xi}_h^k + \mathbf{u}_h^k(\boldsymbol{\xi}_h^k) \Delta t, \quad (1.45)$$

$$\theta_h^{k+1} = \theta_h^k + \frac{\Delta t}{J} \int_{B(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)} (\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h^k(\boldsymbol{\xi}_h^k)) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^k)^\perp d\mathbf{x}. \quad (1.46)$$



**Calcul de la vitesse  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  et de la pression  $p_h^{k+1}$ .** On note  $\mathbf{Pu}_h^k$  la projection orthogonale de  $\mathbf{u}_h^k$  sur  $\mathcal{R}_h$ . On définit alors la fonction caractéristique approchée  $\bar{\psi}_h$  comme la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{\psi}_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{Pu}_h^k(\bar{\psi}_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x})), & \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \bar{\psi}_h(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad (1.47)$$

et on note

$$\bar{\mathbf{X}}_h^k(\mathbf{x}) = \bar{\psi}_h(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \quad (1.48)$$

**Propriétés de la caractéristique  $\bar{\mathbf{X}}_h^k$ .** La caractéristique  $\bar{\mathbf{X}}_h^k(\mathbf{x})$  représente la position approchée à l'instant  $t_k$  d'une particule qui est en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t_{k+1}$ . Dans la définition (1.47) de la caractéristique, on a introduit la projection orthogonale  $\mathbf{Pu}_h^k$  sur  $\mathcal{R}_h$  comme champ de vecteur plutôt que la vitesse  $\mathbf{u}_h^k$  elle-même car  $\text{div}(\mathbf{Pu}_h^k) = 0$  dans  $\mathcal{O}$  (alors que généralement  $\text{div}(\mathbf{u}_h^k) \neq 0$  dans  $\mathcal{O}$ ). La conséquence est que le jacobien de la transformation  $\mathbf{x} \mapsto \bar{\psi}_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x})$  vaut 1 i.e.  $\det \nabla \bar{\psi}_h = 1$  pour tout  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  et en particulier  $\det \nabla \bar{\mathbf{X}}_h^k = 1$ . Cette propriété combinée au fait que le champ de vitesse  $\mathbf{Pu}_h^k$  s'annule sur le bord  $\partial\mathcal{O}$  implique que la fonction  $\bar{\mathbf{X}}_h^k$  laisse invariant le domaine  $\mathcal{O}$  i.e.  $\bar{\mathbf{X}}_h^k(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ .

**Schéma de discrétisation espace-temps.** On détermine la solution  $(\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}) \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}) \times \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  du problème de Stokes sous la forme mixte suivante :

$$\left( \frac{\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \bar{\mathbf{X}}_h^k}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right) + a(\mathbf{u}_h^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p_h^{k+1}) = (\mathbf{f}_h^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}), \quad (1.49)$$

$$b(\mathbf{u}_h^{k+1}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}), \quad (1.50)$$

où les formes bilinéaires  $a$  et  $b$  sont données par (1.25), (1.26) et  $\mathbf{f}_h^{k+1}$  est la projection  $L^2(\mathcal{O})^2$  de  $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}(t_{k+1})$  sur l'espace  $(E_h)^2$ .

Par ailleurs, on prend les données initiales  $\boldsymbol{\xi}_h^0 = \boldsymbol{\xi}_0$ ,  $\theta_h^0 = \theta_0 = 0$  et la vitesse initiale  $\mathbf{u}_0$  est étendue à  $B(\boldsymbol{\xi}_0, \theta_0)$  par

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_1 + \omega_0(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_0)^\perp, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}_0, \theta_0).$$

La vitesse initiale approchée  $\mathbf{u}_h^0$  est alors la projection  $H^1(\mathcal{O})$  de  $\mathbf{u}_0$  sur  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^0, \theta_h^0)$ .

Le résultat suivant indique que les espaces d'Eléments Finis  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  et  $\mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  et la forme bilinéaire  $b$  satisfont une condition *inf-sup* discrète. Cela montre en particulier que le problème approché (1.49)-(1.50) est bien posé (voir [GR79, Theorem II.1.1., p.114]).

**Lemme 1.2.2** *Soit  $(\boldsymbol{\xi}, \theta) \in \mathcal{O} \times [0, 2\pi]$  tel que  $\text{dist}(B(\boldsymbol{\xi}, \theta), \partial\mathcal{O}) = \eta$  avec  $\eta > 0$ . Alors, il existe une constante  $\beta^* > 0$  dépendante seulement de  $\eta$  et de  $\mathcal{O}$ , telle que pour tout  $q_h \in \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}, \theta)$ , il existe  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  vérifiant*

$$\int_{\mathcal{O}} \text{div}(\mathbf{u}_h) q_h \, d\mathbf{x} \geq \beta^* \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\mathcal{O})} \|q_h\|_{L^2(\mathcal{O})}. \quad (1.51)$$

La preuve de ce résultat est obtenue dans [8, Lemma 4.3] sous l'hypothèse simplificatrice où le corps rigide est une boule fermée de  $\mathbb{R}^2$ . Le cas général d'un corps rigide quelconque est traité par des modifications mineures de la démonstration du cas d'une boule.



### 1.2.3 Estimation d'erreurs

Afin d'analyser le schéma numérique (1.49)-(1.50), on fait à présent une hypothèse simplificatrice sur la géométrie du corps rigide. On suppose dans cette section que le rigide est une boule fermée de  $\mathbb{R}^2$ . On notera alors le rigide  $B(t) = B(\boldsymbol{\xi}(t))$  en supprimant la dépendance explicite par rapport à l'angle  $\theta(t)$ . De même, on notera les espaces  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}(t))$ ,  $\mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}(t))$ , etc.

Le résultat de convergence suivant est établi dans [8, Theorem 3.2].

**Théorème 1.2.3** *On suppose que  $\mathcal{O}$  est l'intérieur d'un polygone convexe et que le solide rigide est une boule fermée de  $\mathbb{R}^2$ . Les densités du fluide et du rigide sont supposées égales i.e.  $\rho_f = \rho_s$ . Les données  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{u}_0$  sont choisies telles que (1.27) soit vérifié et on suppose que (1.1)-(1.8) admet une solution  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \theta)$  qui satisfait les hypothèses de régularité (1.28) avec (1.29). Pour  $1 \leq k \leq N$ , on considère les solutions approchées  $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k, \boldsymbol{\xi}_h^k)$  vérifiant (1.45) et (1.49)-(1.50). Soit  $C_0 > 0$  une constante fixée. Alors, il existe deux constantes positives  $C$  et  $\tau^*$  indépendantes de  $h$  et de  $\Delta t$  telles que pour tout  $0 < \Delta t \leq \tau^*$  et pour tout  $h \leq C_0 (\Delta t)^2$ , on a*

$$\sup_{1 \leq k \leq N} \left( |\boldsymbol{\xi}(t_k) - \boldsymbol{\xi}_h^k| + \|\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}_h^k\|_{L^2(\mathcal{O})} \right) \leq C \Delta t.$$

**Remarque 1.2.4** *Pour la méthode des caractéristiques avec les équations de Navier-Stokes seules (sans rigide), le même type de résultat a été obtenu par Pironneau [Pir82] pour  $h \leq C_0 \Delta t$  et aussi par Süli [Sül88] pour  $h^2 \leq C_0 \Delta t \leq C_1 h^\sigma$  avec  $\sigma > 1/2$  (pour  $h$  et  $\Delta t$  suffisamment petits).*

**Remarque 1.2.5** *Dans le schéma (1.49)-(1.50), les termes d'intégrales ainsi que la caractéristique  $\bar{\mathbf{X}}_h^k$  définie par (1.47),(1.48) sont calculés exactement. Dans la pratique, les intégrales et en particulier le terme  $(\mathbf{u}_h^k \circ \bar{\mathbf{X}}_h^k, \boldsymbol{\varphi})$ , sont calculés par des formules de quadrature comme par exemple dans [PLT92] (voir aussi [Pir10] pour une méthode alternative sans formule de quadrature).*

**Propriétés des espaces d'Eléments Finis.** L'analyse d'erreur est effectuée en décomposant le maillage en l'union de 4 différents sous-ensembles de triangles. On introduit tout d'abord l'union  $A_h$  de tous les triangles qui intersectent la boule rigide  $B(\boldsymbol{\xi}_h^k)$ , i.e.

$$A_h = \bigcup_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ \overset{\circ}{K} \cap \overset{\circ}{B}(\boldsymbol{\xi}_h^k) \neq \emptyset}} K.$$

Par ailleurs, on désigne par  $Q_h$  l'union de tous les triangles dont tous les sommets sont contenus dans  $\bar{A}_h$ . Les triangles de  $\mathcal{T}_h$  sont alors séparés en 4 catégories (voir Figure 1.3) :

- $\mathcal{F}_1$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{T}_h$  formé par tous les triangles  $K \in \mathcal{T}_h$  tels que  $\bar{K} \subset B(\boldsymbol{\xi}_h^k)$ .
- $\mathcal{F}_2$  est le sous-ensemble formé par tous les triangles  $K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{F}_1$  tels que  $\bar{K} \subset \bar{Q}_h$ .
- $\mathcal{F}_3$  est le sous-ensemble formé par tous les triangles  $K \in \mathcal{T}_h$  tels que  $\bar{K} \cap \bar{Q}_h \neq \emptyset$  et  $K \not\subset \bar{Q}_h$ .
- $\mathcal{F}_4 = \mathcal{T}_h \setminus (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3)$ .

Ainsi, du point de vue numérique (au sens de l'approximation conforme  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k) \subset \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}_h^k)$ ), le corps rigide est constitué des triangles  $K \subset Q_h = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ . En effet, toute fonction  $\mathbf{v}_h \in V_h$  qui est rigide dans  $B(\boldsymbol{\xi}_h^k)$  est aussi rigide dans  $Q_h$ .

**Méthodologie générale de la preuve du résultat de convergence.** Pour établir l'estimation d'erreur du Théorème 1.2.3, on a besoin de comparer la solution exacte  $\mathbf{u}(t_k) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}(t_k))$ , qui est une vitesse rigide dans  $B(\boldsymbol{\xi}(t_k))$ , avec  $\mathbf{u}_h^k \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}_h^k)$  qui est une vitesse rigide dans  $B(\boldsymbol{\xi}_h^k)$ . Pour réaliser cela, on utilise un changement de variable  $\mathbf{X}_{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2}$  (voir [8, Section 5]), qui envoie la boule  $B(\boldsymbol{\xi}_1)$  dans la boule  $B(\boldsymbol{\xi}_2)$ . On définit

$$\mathbf{X}_h^k = \mathbf{X}_{\boldsymbol{\xi}_h^k, \boldsymbol{\xi}(t_k)}, \quad \mathbf{Y}_h^k = \mathbf{Y}_{\boldsymbol{\xi}_h^k, \boldsymbol{\xi}(t_k)},$$

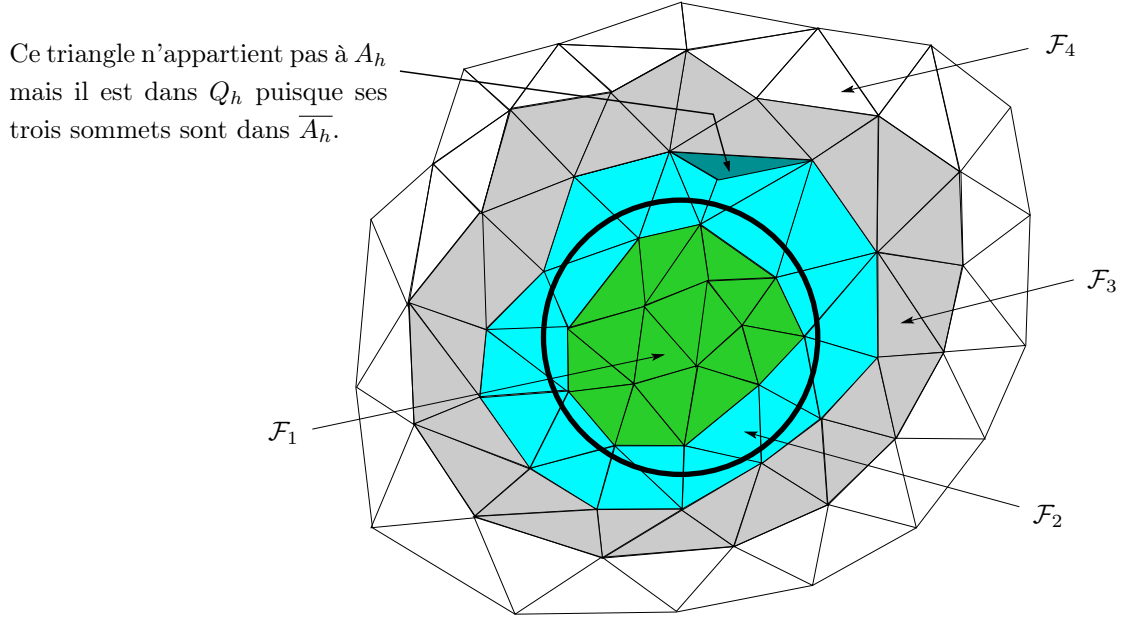


FIGURE 1.3 – Une boule rigide et les différents sous-ensembles de triangles de la triangulation

où  $\mathbf{Y}_{\xi_1, \xi_2}$  est l'application inverse de  $\mathbf{X}_{\xi_1, \xi_2}$ . On définit également

$$\mathbf{U}_h^k(\mathbf{y}) = \mathbf{J}_{\mathbf{Y}_h^k}(\mathbf{X}_h^k(\mathbf{y}))\mathbf{u}(\mathbf{X}_h^k(\mathbf{y}), t_k), \quad P_h^k(\mathbf{y}) = p(\mathbf{X}_h^k(\mathbf{y}), t_k), \quad (1.52)$$

où  $\mathbf{J}_{\mathbf{Y}_h^k}$  est le déterminant de la matrice jacobienne de  $\mathbf{Y}_h^k$ . On obtient alors que

$$\mathbf{U}_h^k \in \widehat{\mathcal{K}}(\xi_h^k) \quad \text{et} \quad P_h^k \in \mathcal{M}(\xi_h^k). \quad (1.53)$$

Les fonctions  $\mathbf{U}_h^{k+1}$  et  $P_h^{k+1}$  satisfont une formulation variationnelle mixte d'un problème de type Stokes où les fonctions tests sont dans  $\mathcal{K}(\xi_h^{k+1})$  et  $\mathcal{M}(\xi_h^{k+1})$ . En particulier, on a  $\text{div}(\mathbf{U}_h^{k+1}) = \text{div}(\mathbf{u}_h^{k+1}(\bar{\mathbf{X}}_h^k))$  et  $b(\mathbf{U}_h^{k+1}, q) = 0$  pour tout  $q \in \mathcal{M}(\xi_h^{k+1})$ . On peut alors comparer d'une part  $\mathbf{u}(t_{k+1})$  avec  $\mathbf{U}_h^{k+1}$  et d'autre part  $\mathbf{U}_h^{k+1}$  avec  $\mathbf{u}_h^{k+1}$ , ces vitesses étant toutes deux rigides au même endroit c'est-à-dire rigides dans  $B(\xi_h^k)$ .

### 1.2.4 Système linéaire

On va décrire à présent le système linéaire obtenu après discrétisation totale du système (1.49)-(1.50). Les détails sont donnés surtout pour l'approximation de Galerkin par Eléments Finis pour le système fluide-rigide. Dans cette partie, on choisit des Eléments Finis de Taylor-Hood pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, c'est-à-dire qu'on prend des approximations  $\mathbb{P}_1$  pour la pression et  $\mathbb{P}_2$  pour la vitesse plutôt qu'une approximation  $\mathbb{P}_1$ -bulle pour la vitesse, comme c'était le cas pour les estimations d'erreurs (voir sous-section 1.2.2). On introduit donc les sous-espaces de dimension finie  $V_h \subset H_0^1(\mathcal{O})$ ,  $W_h \subset [H_0^1(\mathcal{O})]^2$  et  $E_h \subset L^2(\mathcal{O})$  définis par

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\mathcal{O}}) \mid v = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}; v|_K \in \mathbb{P}_2, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (1.54)$$

$$W_h = V_h \times V_h \quad (1.55)$$

$$E_h = \{q \in C^0(\bar{\mathcal{O}}) \mid q|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (1.56)$$

Les espaces  $V_h$  et  $E_h$  sont engendrés par les fonctions de base de Lagrange  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  et  $v_1, \dots, v_M$  respectivement. Les fonctions de base de  $W_h$  sont notées  $\Phi_1, \dots, \Phi_{2N}$  et elles sont choisies telles que  $\Phi_i = (\varphi_i, 0)^\top$  et  $\Phi_{N+i} = (0, \varphi_i)^\top$  for  $i = 1, \dots, N$ .

On définit ensuite des ensembles d'indices qui permettent de distinguer les degrés de liberté du maillage qui appartiennent à la partie fluide de ceux qui sont dans le solide rigide. Ces ensembles d'indices dépendent en particulier de la position du solide rigide  $B(\xi_h^k, \theta_h^k)$  à l'instant  $t_k$ , mais pour alléger les notations, on n'indiquera pas explicitement la dépendance de ces ensembles par rapport à  $k$ .

1. Soit  $I_{s,1}$  l'ensemble des indices des noeuds correspondant aux sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  qui appartiennent au solide rigide  $B(\xi_h^k, \theta_h^k)$ . Soit  $I_{f,1}$  l'ensemble des indices des noeuds correspondant aux sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  qui appartiennent au domaine fluide  $\mathcal{F}(\xi_h^k, \theta_h^k)$ . On notera  $M_f = \text{card}(I_{f,1})$  le nombre de sommets dans le fluide et  $M_s = \text{card}(I_{s,1})$  le nombre de sommets dans le solide rigide. Bien évidemment, on a  $M = M_f + M_s$  où  $M$  est le nombre total de sommets du maillage  $\mathcal{T}_h$ .
2. Soit  $I_{s,2}$  l'ensemble des indices correspondant aux sommets et aux points milieux des arêtes des triangles  $K \subset \overline{Q_h}$  avec  $Q_h = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  c'est-à-dire des triangles constituant le corps rigide (respectivement (voir Figure 1.3 et Figure 1.4)). Soit  $I_{f,2} = \{1, \dots, N\} \setminus I_{s,2}$  l'ensemble des indices correspondant aux sommets et points milieux des arêtes des triangles qui se trouvent dans le fluide (au sens des ensembles  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_4$  définis à la sous-section 1.2.3). On notera  $N_f = \text{card}(I_{f,2})$ ,  $N_s = \text{card}(I_{s,2})$  et on a bien sûr  $N = N_f + N_s$  où  $N$  est le nombre total de sommets et d'arêtes du maillage  $\mathcal{T}_h$ .

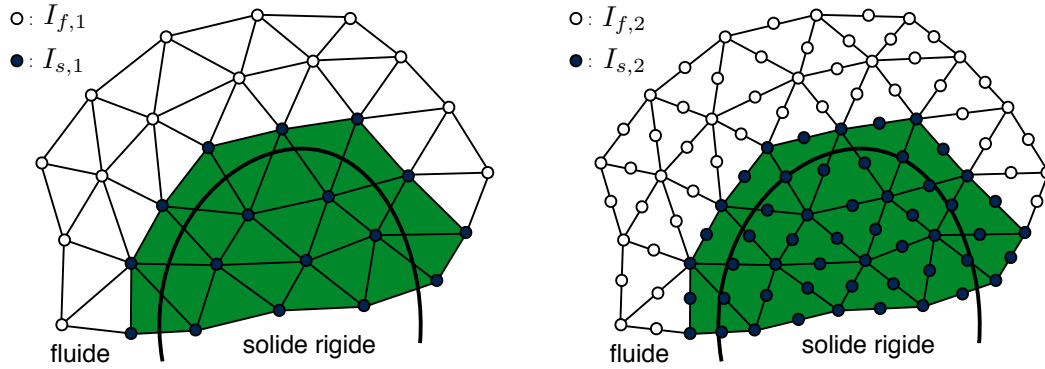


FIGURE 1.4 – Les ensembles d'indices  $I_{f,1}$ ,  $I_{s,1}$  (à gauche, maillage  $\mathbb{P}_1$ ) et  $I_{f,2}$ ,  $I_{s,2}$  (à droite, maillage  $\mathbb{P}_2$ ).

Par la suite, on aura besoin de considérer les ensembles d'indices associés aux fonctions de bases vectorielles  $\Phi_i$ ,  $1 \leq i \leq 2N$ . Ces ensembles seront notés de la façon suivante :

$$\mathcal{I}_{f,2} = I_{f,2} \cup \{N + I_{f,2}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_{s,2} = I_{s,2} \cup \{N + I_{s,2}\}. \quad (1.57)$$

L'espace approché  $\mathcal{K}_h(\xi_h^k, \theta_h^k)$  des fonctions rigides à l'instant  $t_k$  est engendré par les fonctions de base vectorielles  $\Phi_i$  correspondant aux degrés de liberté dans le domaine fluide, ainsi que les trois fonctions de base rigides suivantes :

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_{s,2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (1.58)$$

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_{s,2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (1.59)$$

$$\mathbf{L}_3(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_{s,2}} (\mathbf{x} - \xi_h^k)^\perp \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (1.60)$$

où  $\varphi_i$  sont les fonctions de base de  $V_h$  (fonctions de base  $\mathbb{P}_2$ ). Les fonctions de base rigides  $L_i$  possèdent les caractéristiques suivantes :

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{Q_h}, \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{F}_4, \end{cases} \quad (1.61)$$

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{Q_h}, \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{F}_4, \end{cases} \quad (1.62)$$

$$\mathbf{L}_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^k)^\perp & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{Q_h}, \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{F}_4. \end{cases} \quad (1.63)$$

Ainsi, l'espace approché  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  des vitesses est défini par :

$$\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) = \text{span}(\{\Phi_i\}_{i \in \mathcal{I}_{f,2}}, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3) \quad (1.64)$$

On notera  $(\phi_i)_{i=1, \dots, 2N_f+3}$  les fonctions de base de  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \phi_i &= \Phi_i & \text{pour } i = 1, \dots, N_f \\ \phi_{N_f+j} &= \mathbf{L}_j & \text{pour } j = 1, \dots, 3. \end{aligned} \quad (1.65)$$

L'espace approché  $\mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  pour la pression est défini par :

$$\mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) = \text{span}(\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}_{f,1}}) \cap L_0^2(\Omega). \quad (1.66)$$

Les définitions (1.64) et (1.66) fournissent bien les approximations conformes  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) \subset \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  et  $\mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) \subset \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$ . La vitesse  $\mathbf{u}_h^k \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  et la pression  $p_h^k \in \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  se décomposent alors en

$$\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}_{f,2}} u_i^k \Phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 \eta_j^k \mathbf{L}_j(\mathbf{x}) \quad (1.67)$$

$$p_h^k(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{I}_{f,1}} p_i^k v_i(\mathbf{x}). \quad (1.68)$$

Les valeurs  $(\eta_1^k, \eta_2^k)^\top$  et  $\eta_3^k$  sont respectivement les approximations de la vitesse exacte du centre de masse et la vitesse angulaire exacte du solide rigide à l'instant  $t_k$ , i.e.  $(\eta_1^k, \eta_2^k)^\top \simeq \boldsymbol{\xi}'(t_k)$  et  $\eta_3^k \simeq \theta'(t_k)$ . A l'instant  $t_{k+1}$ , la nouvelle position approchée du solide est déterminée en calculant

$$\boldsymbol{\xi}_h^{k+1} = \boldsymbol{\xi}_h^k + \begin{pmatrix} \eta_1^k \\ \eta_2^k \end{pmatrix} \Delta t, \quad \theta_h^{k+1} = \theta_h^k + \eta_3^k \Delta t. \quad (1.69)$$

On détermine alors la vitesse  $\mathbf{u}_h^{k+1} \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  et la pression  $p_h^{k+1} \in \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  en résolvant le système (1.49)-(1.50). Compte tenu de (1.65), on réécrit la décomposition (1.67) de la vitesse  $\mathbf{u}_h^k$  sous la forme

$$\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2N_f+3} U_i^k \phi_i(\mathbf{x}), \quad (1.70)$$

avec la correspondance  $(U_1^k, \dots, U_{2N_f+3}^k) = (u_1^k, \dots, u_{2N_f}^k, \eta_1^k, \eta_2^k, \eta_3^k)$ . On injecte à présent les décompositions (1.70), (1.68) dans (1.49)-(1.50) et on obtient le système linéaire suivant :

$$\sum_{i=1}^{2N_f+3} U_i^{k+1} \alpha(\phi_i, \phi_j) + \sum_{i \in I_{f,1}} p_i^{k+1} b(\phi_j, v_i) = g^k(\phi_j) \quad (1.71)$$

$$\sum_{i=1}^{2N_f^{k+1}+3} U_i^{k+1} b(\phi_i, v_l) = 0 \quad (1.72)$$

pour  $j = 1, \dots, 2N_f + 3$ ,  $l = 1, \dots, M_f$  et avec

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{et} \quad g(\mathbf{v}) = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_h^k \circ \bar{\mathbf{X}}_h^k, \mathbf{v}). \quad (1.73)$$

Puisque  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}) \subset W_h$ , on peut décomposer les fonctions  $\phi_i$  sur les fonctions de base  $\{\Phi_j\}$  avec  $\phi_i = \sum_{j=1}^{2N} \mu_{ij} \Phi_j$  et on obtient alors

$$\alpha(\phi_i, \phi_j) = \sum_{l,s=1}^{2N} \mu_{il} \alpha(\Phi_l, \Phi_s) \mu_{js} = (\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^\top)_{ij} \quad (1.74)$$

$$b(\phi_j, v_i) = \sum_{l=1}^{2N} \mu_{jl} b(\Phi_l, v_i) = (\mathbf{R} \mathbf{B})_{ji} \quad (1.75)$$

$$g(\phi_j) = \sum_{i=1}^{2N} \mu_{ji} g(\Phi_i) = (\mathbf{R} \mathbf{G})_j \quad (1.76)$$

où on a noté

$$\begin{aligned} \mathbf{A} & \text{ une matrice de taille } 2N \times 2N \text{ avec } \mathbf{A}_{ij} = \alpha(\Phi_i, \Phi_j), \\ \mathbf{B} & \text{ une matrice de taille } 2N \times M \text{ avec } \mathbf{B}_{ij} = b(\Phi_i, v_j), \\ \mathbf{R} & \text{ est une matrice de taille } (2N_f + 3) \times 2N \text{ avec } \mathbf{R}_{ij} = \mu_{ij}, \\ \mathbf{G}_j & = g(\Phi_j) \text{ for } j = 1, \dots, 2N. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Pour écrire le système linéaire (1.71)-(1.72) sous forme matricelle, on a besoin d'introduire les notations suivantes. On notera  $\mathbf{I}_{n_1}$  la matrice identité d'ordre  $n_1$  et  $\mathbf{0}_{n_1, n_2}$  désignera la matrice nulle de taille  $n_1 \times n_2$ . Enfin,  $\mathbf{0}_{n_1}$  représentera le vecteur nul de  $\mathbb{R}^{n_1}$ . Le système linéaire (1.71)-(1.72) s'écrit alors

$$\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^\top \mathbf{U} + \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbb{I}_1 \mathbf{P} = \mathbf{R} \mathbf{G} \quad (1.78)$$

$$(\mathbf{R} \mathbf{B} \mathbb{I}_1)^\top \mathbf{U} = \mathbf{0}_{M_f} \quad (1.79)$$

où les inconnues sont les vecteurs vitesse  $\mathbf{U}$  et pression  $\mathbf{P}$  définis par :

$$\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_{2N_f}, \eta_1, \eta_2, \eta_3)^\top \in \mathbb{R}^{2N_f+3}, \quad \mathbf{P} = (p_1, \dots, p_{M_f})^\top \in \mathbb{R}^{M_f} \quad (1.80)$$

et  $\mathbb{I}_1$  est une matrice de taille  $M \times M_f$  donnée par

$$\mathbb{I}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{M_f} \\ \mathbf{0}_{M_s, M_f} \end{pmatrix}. \quad (1.81)$$

Le système (1.78)-(1.79) s'écrit encore sous la forme

$$\mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^\top \mathbf{X} = \mathcal{P}\mathbf{G} \quad (1.82)$$

où la matrice  $\mathcal{A}$  de taille  $(2N + M) \times (2N + M)$  et la matrice  $\mathcal{P}$  de taille  $(2N_f + 3 + M_f) \times (2N + M)$  sont données par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{0}_{M,M} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{2N_f+3,M} \\ \mathbf{0}_{M_f,2N} & \mathbb{I}_1^\top \end{pmatrix}, \quad (1.83)$$

et le vecteur  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^M$  vaut

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0}_M \end{pmatrix}. \quad (1.84)$$

Le vecteur  $\mathbf{X}$  des inconnues représentant la vitesse et la pression approchées à l'instant  $t_{k+1}$ , est donné par

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \underbrace{(U_1, \dots, U_{2N_f})}_{\text{vitesses fluide}}, \underbrace{(\eta_1, \eta_2, \eta_3)}_{\substack{\text{vitesse} \\ \text{rigide}}}, \underbrace{(p_1, \dots, p_{M_f})}_{\text{pression fluide}}^\top \in \mathbb{R}^{2N_f+3+M_f}. \quad (1.85)$$

Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ne dépendent pas de  $k$  mais uniquement de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Par conséquent, la matrice  $\mathcal{A}$  du système (1.82) ne dépend pas non plus de  $k$ . La matrice  $\mathcal{A}$  correspond exactement à la matrice de Stokes provenant de la discrétisation par Eléments Finis  $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2$  des équations de Stokes avec la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . La matrice  $\mathcal{A}$  peut donc être calculée une fois pour toute, avant les itérations en temps sur  $k$ . En revanche, le vecteur  $\mathbf{G}$  et la matrice de passage  $\mathcal{P}$  doivent être calculée à chaque itération sur  $k$ . La matrice  $\mathcal{P}$  est de taille  $(2N_f + 3 + M_f) \times (2N + M)$ . En supposant que les degrés de liberté sont numérotés en regroupant d'abord en premier ceux qui sont dans la partie fluide puis ensuite ceux qui sont dans la partie rigide et ceci pour chacune des composantes de la vitesse et pour la pression, la matrice  $\mathcal{P}$  est alors donnée par

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N_f} & \mathbf{0}_{N_f,N_s} & \mathbf{0}_{N_f,N_f} & \mathbf{0}_{N_f,N_s} & \mathbf{0}_{N_f,M_f} & \mathbf{0}_{N_f,M_s} \\ \mathbf{0}_{N_f,N_f} & \mathbf{0}_{N_f,N_s} & \mathbf{I}_{N_f} & \mathbf{0}_{N_f,N_s} & \mathbf{0}_{N_f,M_f} & \mathbf{0}_{N_f,M_s} \\ \mathbf{0}_{3,N_f} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \dots & \alpha \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{3,M_f} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ \beta & \dots & \beta \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{3,M_f} & \mathbf{0}_{3,M_s} \\ \mathbf{0}_{M_f,N_f} & \mathbf{0}_{M_f,N_s} & \mathbf{0}_{M_f,N_f} & \mathbf{0}_{M_f,N_s} & \mathbf{I}_{M_f} & \mathbf{0}_{M_f,M_s} \end{pmatrix}, \quad (1.86)$$

où on a noté

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\mathbf{x}(P_i) - \boldsymbol{\xi}_h^k)^\perp,$$

avec  $P_i$  désignant un noeud du maillage  $\mathbb{P}_2$  (sommets et milieux d'arêtes) avec  $i \in I_{s,2}$ , i.e. un noeud rigide. Les 3 lignes de la matrice  $\mathcal{P}$  qui sont en grisé, correspondent aux trois degrés de liberté définissant la vitesse du solide rigide.

**Calcul de la vitesse approchée  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  sur le maillage  $\mathcal{T}_h$ .** Une fois que la solution  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$  du système (1.82) calculée, on détermine la vitesse  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  avec la décomposition sur l'espace  $W_h$  de la façon suivante :

$$\mathbf{u}_h^{k+1} = \sum_{i=1}^{2N_f+3} U_i^{k+1} \phi_i = \sum_{i=1}^{2N_f+3} \sum_{j=1}^{2N} U_i^{k+1} \mu_{ij} \Phi_j$$

de telle sorte que

$$\mathbf{u}_h^{k+1} = \sum_{j=1}^{2N} \left( \mathbf{R}^\top \mathbf{U} \right)_j \Phi_j.$$

Les valeurs de la vitesse approchée  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  sur les noeuds du maillage  $\mathbb{P}_2$  sont donc données par le vecteur  $\mathbf{R}^\top \mathbf{U}$ .

**Extension au cas de plusieurs solides rigides.** La méthode monolithique de Lagrange-Galerkin décrite précédemment se généralise naturellement au cas de plusieurs solides rigides. Considérons deux rigides  $B_1$  et  $B_2$ . On décompose l'ensemble des indices "solides"  $I_{s,2} = I_{s,2}^1 \cup I_{s,2}^2$  où  $I_{s,2}^1$  (respectivement  $I_{s,2}^2$ ) correspond aux noeuds du maillage  $\mathbb{P}_2$  qui appartiennent au solide  $B_1$  (respectivement  $B_2$ ) selon le sens donné à cette appartenance au début de la sous-section. On notera  $N_s^1 = \text{card}(I_{s,2}^1)$ ,  $N_s^2 = \text{card}(I_{s,2}^2)$  et on a  $N = N_f + N_s^1 + N_s^2$  où  $N$  est le nombre total de sommets et d'arêtes du maillage  $\mathcal{T}_h$ . On obtient le système linéaire (1.82),(1.83) où les inconnues  $\mathbf{X}$  représentant les vitesses et la pression approchées à l'instant  $t_{k+1}$  sont

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \underbrace{(U_1, \dots, U_{2N_f})}_{\text{vitesse fluide}}, \underbrace{(\eta_1^1, \eta_2^1, \eta_3^1)}_{\text{vitesse solide } B_1}, \underbrace{(\eta_1^2, \eta_2^2, \eta_3^2)}_{\text{vitesse solide } B_2}, \underbrace{(p_1, \dots, p_{M_f})}_{\text{pression fluide}} \in \mathbb{R}^{2N_f+2 \times 3 + M_f}. \quad (1.87)$$

Pour  $j = 1, 2$ , on a  $(\eta_1^j, \eta_2^j)^\top \simeq \boldsymbol{\xi}_j'(t_{k+1})$  et  $\eta_3^j \simeq \theta_j'(t_{k+1})$  qui sont les approximations de la vitesse du centre de masse et de la vitesse angulaire du solide rigide  $B_j$  à l'instant  $t_{k+1}$  où  $\boldsymbol{\xi}_j$  et  $\theta_j$  définissent la position exacte du solide  $B_j$ .

Dans le système (1.82), la matrice de passage  $\mathcal{P}$  de taille  $(2N_f + 2 \times 3 + M_f) \times (2N + M)$  s'écrit désormais

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N_f} & \mathbf{0}_{N_f, N_s^1} & \mathbf{0}_{N_f, N_s^2} & \mathbf{0}_{N_f, N_f} & \mathbf{0}_{N_f, N_s^1} & \mathbf{0}_{N_f, N_s^2} & \mathbf{0}_{N_f, M_f} & \mathbf{0}_{N_f, M_s} \\ \mathbf{0}_{N_f, N_f} & \mathbf{0}_{N_f, N_s^1} & \mathbf{0}_{N_f, N_s^2} & \mathbf{I}_{N_f} & \mathbf{0}_{N_f, N_s^1} & \mathbf{0}_{N_f, N_s^2} & \mathbf{0}_{N_f, M_f} & \mathbf{0}_{N_f, M_s} \\ \mathbf{0}_{3, N_f} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{3, N_s^2} & \mathbf{0}_{3, M_f} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ \beta_1 & \dots & \beta_1 \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{3, N_s^2} & \mathbf{0}_{3, M_f} & \mathbf{0}_{3, M_s} \\ \mathbf{0}_{3, N_f} & \mathbf{0}_{3, N_s^1} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{3, M_f} & \mathbf{0}_{3, N_s^1} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ \beta_2 & \dots & \beta_2 \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{3, M_f} & \mathbf{0}_{3, M_s} \\ \mathbf{0}_{M_f, N_f} & \mathbf{0}_{M_f, N_s^1} & \mathbf{0}_{M_f, N_s^2} & \mathbf{0}_{M_f, N_f} & \mathbf{0}_{M_f, N_s^1} & \mathbf{0}_{M_f, N_s^2} & \mathbf{I}_{M_f} & \mathbf{0}_{M_f, M_s} \end{pmatrix}.$$

Dans la matrice  $\mathcal{P}$  précédente, on a noté, pour  $j = 1, 2$ ,

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} = (\mathbf{x}(P_i) - \boldsymbol{\xi}_{j,h}^k)^\perp,$$

avec  $P_i$  désignant un noeud du maillage  $\mathbb{P}_2$  (sommets et milieux d'arêtes de  $\mathcal{T}_h$ ) avec  $i \in I_{s,2}^j$ , i.e. un degré de liberté appartenant au solide rigide  $B_j$  de centre de masse  $\boldsymbol{\xi}_{j,h}^k$ . Les  $2 \times 3$  lignes de la matrice  $\mathcal{P}$  qui sont en grisé, correspondent aux  $2 \times 3$  degrés de liberté définissant les vitesses des deux solides rigides  $B_1$  et  $B_2$ .

### 1.2.5 Méthode des caractéristiques d'ordre 2

La méthode des caractéristiques utilisée dans le schéma de semi-discrétisation en temps (1.33)–(1.36) est d'ordre 1 par rapport au pas de temps  $\Delta t$ , au sens où formellement, on a

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}, t_{k+1}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{k+1}) - \mathbf{u}(\bar{\mathbf{X}}^k(\mathbf{x}), t_k)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

où  $\bar{\mathbf{X}}^k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x})$  avec  $\boldsymbol{\psi}(\cdot; t_{k+1}, \mathbf{x})$  solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x}), t_k), & \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \boldsymbol{\psi}(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (1.88)$$

Un schéma de semi-discrétisation en temps plus précis est obtenu en considérant le schéma de Gear suivant (voir [BMMR97], [Gum96]) :

$$\left( \frac{(3\mathbf{u}^{k+1} - 4\bar{\mathbf{u}}^k + \bar{\bar{\mathbf{u}}}^{k-1})}{2\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right) + a(\mathbf{u}^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p^{k+1}) = (\mathbf{f}^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}), \quad (1.89)$$

$$b(\mathbf{u}^{k+1}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}), \quad (1.90)$$

avec  $\bar{\mathbf{u}}^k = \mathbf{u}^k \circ \bar{\mathbf{X}}^k$  et  $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^{k-1} = \mathbf{u}^{k-1} \circ \bar{\bar{\mathbf{X}}}^{k-1}$ . Les fonctions caractéristiques  $\bar{\mathbf{X}}^k$  et  $\bar{\bar{\mathbf{X}}}^{k-1}$  sont définies par  $\bar{\mathbf{X}}^k = \boldsymbol{\psi}^k(t_k; t_{k+1}, \cdot)$  et  $\bar{\bar{\mathbf{X}}}^{k-1} = \boldsymbol{\psi}^k(t_{k-1}; t_{k+1}, \cdot)$  où  $\boldsymbol{\psi}^k$  est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\psi}^k(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^{k*}(\boldsymbol{\psi}^k(t; t_{k+1}, \mathbf{x})), & \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \boldsymbol{\psi}^k(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (1.91)$$

avec  $\mathbf{u}^{k*} = 2\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}$ . Ce schéma fournit une approximation d'ordre 2 en  $\Delta t$ , au sens où formellement, on a

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}, t_{k+1}) = \frac{3\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{k+1}) - 4\mathbf{u}(\bar{\mathbf{X}}^k(\mathbf{x}), t_k) + \mathbf{u}(\bar{\bar{\mathbf{X}}}^{k-1}(\mathbf{x}), t_{k-1})}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2),$$

où  $\bar{\mathbf{X}}^k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x})$  et  $\bar{\bar{\mathbf{X}}}^{k-1}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}(t_{k-1}; t_{k+1}, \mathbf{x})$  avec  $\boldsymbol{\psi}(\cdot; t_{k+1}, \mathbf{x})$  solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\boldsymbol{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x})), & \forall t \in [t_{k-1}, t_{k+1}] \\ \boldsymbol{\psi}(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad (1.92)$$

avec  $\mathbf{u}^* = 2\mathbf{u}(\cdot, t_k) - \mathbf{u}(\cdot, t_{k-1})$ .

Mentionnons enfin un schéma d'ordre 2 en temps, établi par Z. Si dans [Si12] qui est une variante du schéma de Gear précédent. Ce schéma qui présente un bon comportement à haut nombre de Reynolds est obtenu en ajoutant un terme de viscosité artificielle et en corrigeant la solution par une technique de déflexion-correction.



### 1.2.6 Traitement de la pression

On cherche la pression  $p(\cdot, t) \in L_0^2(\mathcal{O})$  à moyenne nulle dans le domaine  $\mathcal{O}$  à chaque instant  $t$ , c'est-à-dire

$$p_{\mathcal{O}}(t) := \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.93)$$

On relache la contrainte de moyenne nulle en introduisant dans l'équation de la divergence un multiplicateur de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le problème obtenu s'écrit de la façon suivante (voir [BL05]).

On note l'espace  $\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \{q \in L^2(\mathcal{O}) \mid q = 0 \text{ dans } B(\boldsymbol{\xi}, \theta)\}$ . A chaque instant  $t \in [0, T]$ , on cherche  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \theta, \lambda)$  tels que  $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t))$ ,  $p(\cdot, t) \in \mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t))$ ,  $\lambda(t) \in \mathbb{R}$  et  $(\mathbf{u}, p, \lambda)$  vérifient

$$\left( \rho \frac{d}{dt} [\mathbf{u} \circ \boldsymbol{\psi}], \boldsymbol{\varphi} \right) + a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p) = (\rho \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \quad (1.94)$$

$$b(\mathbf{u}, q) + \lambda q_{\mathcal{O}} = 0, \quad \forall q \in \mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \quad (1.95)$$

$$\mu p_{\mathcal{O}} = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.96)$$

Dans le cadre de la discrétisation complète en espace-temps présentée dans la sous-section 1.2.4, le système linéaire associé aux équations (1.94)–(1.96) devient

$$\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^\top \mathbf{U} + \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbb{I}_1 \mathbf{P} = \mathbf{R} \mathbf{G} \quad (1.97)$$

$$(\mathbf{R} \mathbf{B} \mathbb{I}_1)^\top \mathbf{U} + \lambda \mathbf{J} = \mathbf{0}_{M_f} \quad (1.98)$$

$$\mathbf{J}^\top \mathbf{P} = 0, \quad (1.99)$$

avec

$$\mathbf{J} = \left( \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} v_i \right)_{i \in I_{f,1}} \in \mathbb{R}^{M_f},$$

où les  $(v_i)$  sont les fonctions de base de  $E_h$  (fonctions  $\mathbb{P}_1$ ). Le système (1.97)–(1.99) s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^\top & \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbb{I}_1 & \mathbf{0}_{2N_f+3} \\ (\mathbf{R} \mathbf{B} \mathbb{I}_1)^\top & \mathbf{0}_{M_f, M_f} & \mathbf{J} \\ \mathbf{0}_{2N_f+3}^\top & \mathbf{J}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \mathbf{G} \\ \mathbf{0}_{M_f} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.100)$$

En utilisant la matrice de passage  $\mathcal{P}$  donnée par (1.86), on remarque que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2N_f+3} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} = \mathcal{P} \mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{2N_f+3+M_f}$$

où

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2N} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+M} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \left( \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} v_i \right)_{i=1, \dots, M} \in \mathbb{R}^M.$$

Le système (1.100) est équivalent au système linéaire suivant où les inconnues sont à présent  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N_f+3+M_f}$  définie par (1.85) et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P} \mathcal{A} \mathcal{P}^\top & \mathcal{P} \mathbf{\Lambda} \\ (\mathcal{P} \mathbf{\Lambda})^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} \mathbf{G} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.101)$$

### 1.3 Méthode de Lagrange-Galerkin pour des densités hétérogènes

Dans cette section, on étudie le cas où les densités du fluide et du solide rigide sont à présent différentes i.e.  $\rho_f \neq \rho_s$ . Afin d'obtenir un résultat de convergence similaire au Théorème 1.2.3 pour le cas homogène  $\rho_f = \rho_s$ , on va introduire une fonction caractéristique différente de la caractéristique standard définie par (1.47),(1.48) pour le cas des densités homogènes. On indiquera les difficultés qui apparaissent pour le cas  $\rho_f \neq \rho_s$  si on utilise la caractéristique standard (1.47),(1.48).

#### 1.3.1 Méthode des caractéristiques modifiée et semi-discrétisation en temps

On suppose qu'on connaît l'approximation  $(\mathbf{u}^k, p^k, \boldsymbol{\xi}^k, \theta^k) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k) \times \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k) \times \mathcal{O} \times [0, 2\pi]$  de la solution du système (1.1)-(1.8) à l'instant  $t = t_k$ . Pour  $k = 0$ , on définit

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\xi}^0 = \boldsymbol{\xi}_0, \quad \theta^0 = \theta_0 = 0, \quad (1.102)$$

où les données initiales  $\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\xi}_0$  vérifient (1.27). On désigne par  $\omega^k$  la vitesse angulaire approchée à l'instant  $t_k$  et calculée en intégrant (1.4) :

$$\omega^k = \frac{1}{J} \int_{B(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k)} (\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k)) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^k)^\perp d\mathbf{x}. \quad (1.103)$$

On définit alors la fonction caractéristique modifiée  $\boldsymbol{\psi}$  comme la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x})) - \mathbf{u}_R^k(\boldsymbol{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x})), & t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \boldsymbol{\psi}(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = R_{-\omega^k \Delta t}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^{k+1}) + \boldsymbol{\xi}^k. \end{cases} \quad (1.104)$$

La vitesse rigide  $\mathbf{u}_R^k$  est définie par

$$\mathbf{u}_R^k(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k) + \omega^k(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^k)^\perp \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (1.105)$$

et  $R_\theta$  désigne la matrice de rotation d'angle  $\theta$ . Enfin, on définit la fonction

$$\mathbf{X}^k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \quad (1.106)$$

Désormais, on fait l'extension suivante :

*Le champ de vitesse  $\mathbf{u}^k$  est étendu à  $\mathbf{0}$  en dehors du domaine  $\mathcal{O}$ .*

Cette extension est nécessaire car en général  $\mathbf{X}^k(\mathcal{O}) \not\subseteq \mathcal{O}$ . La condition initiale dans (1.104) est telle que  $\boldsymbol{\psi}(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x})$  n'appartient pas nécessairement au domaine  $\mathcal{O}$ . Cependant, on vérifie facilement que  $\mathbf{X}^k(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O} + \mathcal{B}(\mathbf{0}, |\mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k)|\Delta t)$  où  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, |\mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k)|\Delta t)$  désigne la boule centrée en  $\mathbf{0}$  et de rayon  $|\mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k)|\Delta t$ .

**Schéma de semi-discrétisation en temps pour des densités hétérogènes.** Comme pour le cas des densités homogènes, on commence par déterminer la nouvelle position du centre de masse  $\boldsymbol{\xi}^{k+1}$  et l'angle d'orientation  $\theta^{k+1}$  du rigide à l'instant  $t_{k+1}$  grâce à (1.31),(1.32). Le schéma de semi-discrétisation en temps s'écrit alors de la façon suivante en formulation mixte. On cherche  $(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}) \times \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1})$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \left( \rho^{k+1} \frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k)}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right) + a(\mathbf{u}^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p^{k+1}) \\ = (\rho^{k+1} \mathbf{f}^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}), \end{aligned} \quad (1.107)$$

$$b(\mathbf{u}^{k+1}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}). \quad (1.108)$$

On a posé  $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}(t_{k+1})$  et la densité  $\rho^{k+1}$  est donnée par

$$\rho^{k+1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_s, & \text{si } \mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}) \\ \rho_f, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \setminus B(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1}). \end{cases}$$

La fonction caractéristique définie par (1.104)–(1.106) possède les propriétés suivantes (voir [4]) :

**Proposition 1.3.1** *Pour tout  $k$ , on a*

1.  $\mathbf{X}^k(\mathbf{x}) = R_{-\omega^k \Delta t}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^{k+1}) + \boldsymbol{\xi}^k$  pour tout  $\mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1})$  ;
2.  $\mathbf{X}^k(B(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1})) = B(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k)$  ;
3. Soit  $\rho^k$  la fonction densité définie par

$$\rho^k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_s, & \text{si } \mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k) \\ \rho_f, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \setminus B(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k). \end{cases}$$

Si on étend à  $\rho_f$  la fonction  $\rho^k$  en dehors de  $\mathcal{O}$ , alors

$$\rho^{k+1} = \rho^k \circ \mathbf{X}^k.$$

Ce résultat indique (cf 2.) que la caractéristique modifiée envoie le corps rigide à l'instant  $t_{k+1}$  sur le corps rigide à l'instant  $t_k$ .

**Comparaison avec la caractéristique standard.** Dans le schéma (1.107),(1.108), si à la place de  $\mathbf{X}^k$  on considère la fonction caractéristique standard  $\bar{\mathbf{X}}^k$  définie par (1.33),(1.34) pour le cas  $\rho_f = \rho_s$ , alors en général les propriétés de la Proposition 1.3.1 ne sont pas vérifiées avec  $\bar{\mathbf{X}}^k$ . En particulier, on a  $\mathbf{X}^k(B(\boldsymbol{\xi}^{k+1}, \theta^{k+1})) \neq B(\boldsymbol{\xi}^k, \theta^k)$  en général (cf. Figure 1.5) et  $\rho^{k+1} \neq \rho^k \circ \bar{\mathbf{X}}^k$ . Or, lorsqu'on cherche à estimer l'erreur  $\|\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}^k\|_{L^2(\mathcal{O})}$ , le terme suivant

$$\|\rho^{k+1} - \rho^k \circ \bar{\mathbf{X}}^k\|_{L^2(\mathcal{O})} \quad (1.109)$$

apparaît dans les estimations. Ce terme présente une réelle difficulté pour être estimé et ne permet pas d'obtenir des estimations d'erreurs pour le cas  $\rho_f \neq \rho_s$ . Mais bien évidemment, dans le cas où  $\rho_f = \rho_s = 1$ , le terme (1.109) est nul. Avec la caractéristique modifiée (1.104)–(1.106), le terme (1.109) est toujours nul, même pour  $\rho_f \neq \rho_s$ .

**Autre formulation de la caractéristique modifiée.** Le problème (1.104)–(1.106) définissant la caractéristique modifiée peut être reformulé différemment en introduisant la fonction  $\tilde{\psi}$  définie par :

$$\tilde{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = R_{\omega^k(t-t_k)} \left( \psi(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}^k \right) + \boldsymbol{\xi}^k + \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k)(t - t_k) \quad (1.110)$$

La fonction  $\tilde{\psi}$  vérifie alors

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\psi}}{dt}(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = R_{\omega^k(t-t_k)} \left( \mathbf{u}^k \left( \mathbf{G}(t, \tilde{\psi}(t; t_{k+1}, \mathbf{x})) \right) - \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k) \right) + \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k), & t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \tilde{\psi}(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} \end{cases} \quad (1.111)$$

où

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}^k + R_{-\omega^k(t-t_k)} \left( \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^k - \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k)(t - t_k) \right). \quad (1.112)$$

On a également la propriété

$$\mathbf{X}^k(\mathbf{x}) := \psi(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \tilde{\psi}(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x}). \quad (1.113)$$

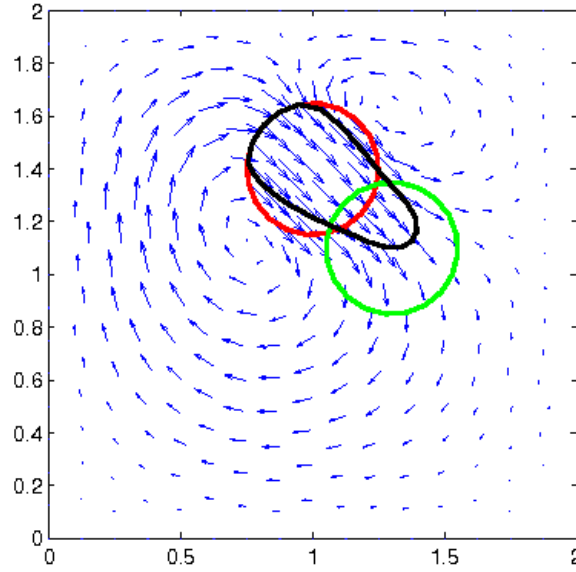


FIGURE 1.5 – Rigide  $B(\xi^k, \theta^k)$  (en rouge), rigide  $B(\xi^{k+1}, \theta^{k+1})$  (en vert) et  $\bar{\mathbf{X}}^k(B(\xi^{k+1}, \theta^{k+1}))$  avec la caractéristique standard  $\bar{\mathbf{X}}^k$  (en noir).

### 1.3.2 Discrétisation complète espace-temps

On considère à présent la discrétisation complète en espace et en temps du système (1.1)-(1.8). Les notations sont les mêmes qu'à la section 1.2.2. On désigne par  $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k, \xi_h^k, \theta_h^k) \in \mathcal{K}_h(\xi_h^k, \theta_h^k) \times \mathcal{M}_h(\xi_h^k, \theta_h^k) \times \mathcal{O} \times [0, 2\pi]$  une approximation de la solution du système (1.1)-(1.8) à l'instant  $t = t_k$ . On désigne par  $\omega_h^k$  la vitesse angulaire approchée à l'instant  $t_k$ , calculée en intégrant (1.4) :

$$\omega_h^k = \frac{1}{J} \int_{B(\xi_h^k, \theta_h^k)} (\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h^k(\xi_h^k)) \cdot (\mathbf{x} - \xi_h^k)^\perp d\mathbf{x}. \quad (1.114)$$

La fonction caractéristique modifiée  $\psi_h$  est définie comme la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \psi_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{P}(\xi_h^k, \theta_h^k) (\mathbf{u}_h^k(\psi_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x})) - \mathbf{u}_R^k(\psi_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x}))), & t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \psi_h(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = R_{-\omega_h^k \Delta t}(\mathbf{x} - \xi_h^{k+1}) + \xi_h^k. \end{cases} \quad (1.115)$$

La vitesse rigide  $\mathbf{u}_R^k$  est définie par

$$\mathbf{u}_R^k(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_h^k(\xi_h^k) + \omega_h^k(\mathbf{x} - \xi_h^k)^\perp, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (1.116)$$

et  $R_\theta$  désigne la matrice de rotation d'angle  $\theta$ . Enfin, on définit la fonction

$$\mathbf{X}_h^k(\mathbf{x}) = \psi_h(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \quad (1.117)$$

Dans la définition de la caractéristique  $\psi_h$ ,  $\mathbf{P}(\xi, \theta)$  désigne la projection orthogonale de  $L^2(\mathcal{O})^2$  sur l'espace  $\mathcal{R}_h(\xi, \theta)$  défini par :

$$\mathcal{R}_h(\xi, \theta) = \{\mathbf{rot}(\varphi_h), \varphi_h \in F_h, \varphi_h = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}\} \cap \mathcal{K}(\xi, \theta), \quad \forall (\xi, \theta) \in \mathcal{O} \times [0, 2\pi] \quad (1.118)$$

où  $F_h$  est l'espace des fonctions continues sur  $\bar{\mathcal{O}}$  qui sont des fonctions  $\mathbb{P}_2$  sur chaque triangle de  $\mathcal{T}_h$ .

L'intérêt d'introduire la projection  $\mathbf{P}$  dans la définition (1.115) est d'avoir un champ de vitesse à divergence nulle i.e.  $\mathbf{P}(\xi_h^k, \theta_h^k) (\mathbf{u}_h^k(\psi_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x})) - \mathbf{u}_R^k(\psi_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x}))) = 0$ , ce qui implique la propriété  $\det \nabla \mathbf{X}_h^k \equiv 1$ .

Comme pour la semi-discrétisation en temps, on fait l'extension suivante :

*Le champ de vitesse  $\mathbf{u}_h^k$  est étendu à  $\mathbf{0}$  en dehors du domaine  $\mathcal{O}$ .*

**Schéma complet de discrétisation espace-temps pour des densités hétérogènes.** Comme pour le cas des densités homogènes, on commence par déterminer la nouvelle position du centre de masse  $\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}$  et l'angle d'orientation  $\theta_h^{k+1}$  du rigide à l'instant  $t_{k+1}$  grâce à (1.45), (1.46). Le schéma de discrétisation complet en espace et en temps s'écrit alors de la façon suivante en formulation mixte.

On cherche  $(\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}) \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}) \times \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  vérifiant :

$$\left( \rho_h^{k+1} \frac{(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k)}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right) + a(\mathbf{u}_h^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p_h^{k+1}) = (\bar{\rho}_h^{k+1} \mathbf{f}_h^{k+1}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}), \quad (1.119)$$

$$b(\mathbf{u}_h^{k+1}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}). \quad (1.120)$$

où  $\mathbf{f}_h^{k+1}$  est la projection  $L^2(\mathcal{O})$  de  $\mathbf{f}(t_{k+1})$  sur  $(E_h)^2$ . La densité  $\rho_h^{k+1}$  est donnée par

$$\rho_h^{k+1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_s, & \text{si } \mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}) \\ \rho_f, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \setminus B(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}) \end{cases}$$

et la densité  $\bar{\rho}_h^{k+1} \in E_h$  satisfait (voir la section 1.2.3 pour la définition de  $Q_h$  et  $\mathcal{F}_4$ ) :

$$\bar{\rho}_h^{k+1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_s, & \text{si } \mathbf{x} \in \bar{Q}_h \\ \rho_f, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{F}_4. \end{cases}$$

La fonction caractéristique  $\psi_h$  définie par (1.115)–(1.117) possède les propriétés suivantes (voir [4]) :

**Proposition 1.3.2** *Pour tout  $k$ , on a*

1.  $\mathbf{X}_h^k(\mathbf{x}) = R_{-\omega_h^k \Delta t}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}) + \boldsymbol{\xi}_h^k$  pour tout  $\mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  ;
2.  $\mathbf{X}_h^k(B(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})) = B(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  ;
3. Soit  $\rho_h^k$  la fonction densité définie par

$$\rho_h^k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_s, & \text{si } \mathbf{x} \in B(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) \\ \rho_f, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \setminus B(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k). \end{cases}$$

*Si on étend à  $\rho_f$  la fonction  $\rho_h^k$  en dehors de  $\mathcal{O}$ , alors*

$$\rho_h^{k+1} = \rho_h^k \circ \mathbf{X}_h^k.$$

Ces propriétés sont essentielles pour établir le résultat de convergence mentionné ci-dessous et démontré dans [18, Theorem 4.1] pour le cas hétérogène  $\rho_f \neq \rho_s$ . Ce résultat est établi sous l'hypothèse simplificatrice que le solide est une boule fermée de  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 1.3.3** *On suppose que  $\mathcal{O}$  est l'intérieur d'un polygone convexe et que le solide rigide est une boule fermée de  $\mathbb{R}^2$ . On choisit les données que  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{u}_0$  vérifiant (1.27) et on suppose que (1.1)–(1.8) admet une solution  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \theta)$  qui vérifie les hypothèses de régularité (1.28) avec (1.29). On désigne par  $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k, \boldsymbol{\xi}_h^k)$  pour  $1 \leq k \leq N$  les solutions approchées vérifiant (1.119)–(1.120) et (1.45). Soient  $C_0 > 0$  et  $0 \leq \alpha \leq 1$  deux constantes fixées. Alors, il existe deux constantes positives  $C$  et  $\tau^*$  indépendantes de  $h$  et de  $\Delta t$  telles que pour tout  $0 < \Delta t \leq \tau^*$  et pour tout  $h \leq C_0 (\Delta t)^{1+\alpha}$ , on a*

$$\sup_{1 \leq k \leq N} \left( |\boldsymbol{\xi}(t_k) - \boldsymbol{\xi}_h^k| + \|\mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}_h^k\|_{L^2(\mathcal{O})} \right) \leq C \Delta t^\alpha.$$

### 1.3.3 Système linéaire avec la caractéristique modifiée.

On notera  $B_h^{k+1} = B(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  et les espaces  $\mathcal{K}_h^{k+1} = \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$ ,  $\mathcal{M}_h^{k+1} = \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$ . Dans le cas des densités hétérogènes, on décompose le terme associé à la dérivée particulaire dans (1.119) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left( \rho_h^{k+1} \frac{(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k)}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right) &= \rho_f \left( \frac{(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k)}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right) \\ &\quad + \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\Delta t} \int_{B_h^{k+1}} (\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.121)$$

pour tout  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{K}_h^{k+1}$ . Les fonctions  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  et  $\boldsymbol{\varphi}$  étant rigides dans le solide  $B_h^{k+1}$ , on a également les expressions suivantes :

$$\mathbf{u}_h^{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_1 + \omega_1(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1})^\perp, \quad (1.122)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_\varphi + \omega_\varphi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1})^\perp, \quad (1.123)$$

pour tout  $\mathbf{x} \in B_h^{k+1}$ . En utilisant ces relations, on obtient

$$\rho_s \int_{B_h^{k+1}} \mathbf{u}_h^{k+1} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = m \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_\varphi + J \omega_1 \omega_\varphi \quad (1.124)$$

où  $m$  est la masse et  $J$  l'inertie du solide. Par ailleurs, compte tenu de la Proposition 1.3.2, on a  $\mathbf{X}_h^k(B_h^{k+1}) = B_h^k$  et par conséquent la vitesse  $\mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k$  est rigide dans le solide  $B_h^{k+1}$ . En d'autre terme, on a

$$\mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_2 + \omega_2(\mathbf{X}_h^k(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}_h^k)^\perp, \quad \forall \mathbf{x} \in B_h^{k+1}. \quad (1.125)$$

En utilisant à nouveau la Proposition 1.3.2, on obtient

$$\rho_s \int_{B_h^{k+1}} \mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = m \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_\varphi + \rho_s \omega_2 \omega_\varphi \int_{B_h^{k+1}} \left( R_{-\omega_h^k \Delta t}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}) \right)^\perp \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1})^\perp \, d\mathbf{x}.$$

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et pour tout  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ , on a  $R_\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \cos(\theta) |\mathbf{y}|^2$ . Par conséquent, on obtient

$$\rho_s \int_{B_h^{k+1}} \mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = m \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_\varphi + J \omega_2 \omega_\varphi \cos(\omega_h^k \Delta t). \quad (1.126)$$

En combinant (1.124) avec (1.126) dans (1.121), on obtient

$$\begin{aligned} \left( \rho_h^{k+1} \frac{(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k)}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right) &= \rho_f \left( \frac{(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k)}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \left[ m(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_\varphi + J \left( \omega_1 - \omega_2 \cos(\omega_h^k \Delta t) \right) \omega_\varphi \right]. \end{aligned} \quad (1.127)$$

On pose alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta_1^{k+1} \\ \eta_2^{k+1} \end{pmatrix} &= \mathbf{l}_1 = \mathbf{u}_h^{k+1}(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}), \quad \begin{pmatrix} \eta_1^k \\ \eta_2^k \end{pmatrix} = \mathbf{l}_2 = \mathbf{u}_h^k(\boldsymbol{\xi}_h^k), \\ \eta_3^{k+1} &= \omega_1, \quad \eta_3^k = \omega_2. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Le schéma de discrétisation en espace-temps avec la caractéristique modifiée s'écrit alors

$$\begin{aligned} \rho_f \left( \frac{(\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \mathbf{X}_h^k)}{\Delta t}, \varphi \right) + \frac{1}{\Delta t} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \left[ m \left( \frac{\eta_1^{k+1} - \eta_1^k}{\eta_2^{k+1} - \eta_2^k} \right) \cdot \mathbf{l}_\varphi + J \left( \eta_3^{k+1} - \eta_3^k \cos(\omega_h^k \Delta t) \right) \omega_\varphi \right] \\ + a(\mathbf{u}_h^{k+1}, \varphi) + b(\varphi, p_h^{k+1}) = (\bar{\rho}_h^{k+1} \mathbf{f}_h^{k+1}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}_h^{k+1} \end{aligned} \quad (1.129)$$

$$b(\mathbf{u}_h^{k+1}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}_h^{k+1}. \quad (1.130)$$

**Remarque 1.3.4** En considérant le problème exact (1.23),(1.24), on peut effectuer le même type de transformation sur la dérivée particulaire associée à la vitesse exacte  $\mathbf{u}$ . Pour tout  $\varphi \in \mathcal{K}(\xi(t), \theta(t))$ , on a

$$\int_{\mathcal{O}} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = \rho_f \int_{\mathcal{O}} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} + \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \rho_s \int_{B(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (1.131)$$

Par ailleurs, la vitesse vérifie  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \xi'(t) + \theta'(t)(\mathbf{x} - \xi(t))^\perp$  pour tout  $\mathbf{x} \in B(t)$ ,  $t \geq 0$ . De même, toute fonction  $\varphi \in \mathcal{K}(\xi(t), \theta(t))$  vérifie  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{l}_\varphi + \omega_\varphi(\mathbf{x} - \xi(t))^\perp$  pour tout  $\mathbf{x} \in B(t)$ ,  $t \geq 0$ . On obtient ainsi

$$\int_{\mathcal{O}} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = \rho_f \int_{\mathcal{O}} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} + \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) (m\xi''(t) \cdot \mathbf{l}_\varphi + J\theta''(t)\omega_\varphi). \quad (1.132)$$

La formulation exacte (1.23),(1.24) est alors équivalent à

$$\begin{aligned} \rho_f \int_{\mathcal{O}} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \varphi \, d\mathbf{x} + \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) (m\xi''(t) \cdot \mathbf{l}_\varphi + J\theta''(t)\omega_\varphi) \\ + a(\mathbf{u}, \varphi) + b(\varphi, p) = (\mathbf{f}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}(\xi(t), \theta(t)) \end{aligned} \quad (1.133)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}(\xi(t), \theta(t)). \quad (1.134)$$

On voit ainsi que le schéma discrétisé (1.129),(1.130) correspond bien à une approximation de la formulation exacte (1.133),(1.134) avec un terme un peu étrange pour l'approximation de  $\theta''(t)$  :

$$\theta''(t_{k+1}) \simeq \frac{\eta_3^{k+1} - \eta_3^k \cos(\omega_h^k \Delta t)}{\Delta t}.$$

**Système linéaire.** On reprend le contexte de la section 1.2.4 où on a obtenu le système linéaire (1.82) dans le cas des densités homogènes avec la caractéristique standard. En utilisant les espaces d'Eléments Finis de la section 1.2.4, le schéma (1.129),(1.130) conduit au système linéaire suivant :

$$(\mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^\top + \mathcal{C}) \mathbf{X} = \mathcal{P}\mathcal{G} + \mathbf{Y}, \quad (1.135)$$

Le vecteur des inconnues  $\mathbf{X}$  est définie par (1.85) et la matrice  $\mathcal{A}$  définie par (1.83) correspond à la matrice de Stokes avec des termes de masse dans (1.73) ne faisant intervenir que la densité constante  $\rho_f$  (au lieu de  $\rho$ ). Le vecteur  $\mathcal{G}$  défini par (1.84) ne dépend également que de  $\rho_f$ . La matrice  $\mathcal{P}$  est la matrice de passage définie par (1.83). La prise en compte des termes correcteurs sur la densité se fait

à travers la matrice  $\mathcal{C}$  et le vecteur  $\mathbf{Y}$ . La matrice  $\mathcal{C}$  est une matrice carrée d'ordre  $(2N_f + 3 + M_f)$  et le vecteur  $\mathbf{Y}$  a  $(2N_f + 3 + M_f)$  composantes. Ils sont donnés par

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\Delta t} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2N_f, 2N_f} & \mathbf{0}_{2N_f, 3} & \mathbf{0}_{2N_f, M_f} \\ \hline \mathbf{0}_{3, 2N_f} & \begin{matrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{matrix} & \mathbf{0}_{3, M_f} \\ \hline \mathbf{0}_{M_f, 2N_f} & \mathbf{0}_{M_f, 3} & \mathbf{0}_{M_f, M_f} \end{pmatrix}, \quad (1.136)$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\Delta t} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2N_f} \\ \hline m\eta_1^k \\ m\eta_2^k \\ J\eta_3^k \cos(\omega^k \Delta t) \\ \hline \mathbf{0}_{M_f} \end{pmatrix}. \quad (1.137)$$

Les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$  sont indépendantes des itérations sur  $k$ . Elles peuvent donc être calculées une fois pour toute. En revanche la matrice de passage  $\mathcal{P}$  et les vecteurs  $\mathcal{G}$  et  $\mathbf{Y}$  dépendent de la solution approchée à l'instant  $t_k$  et doivent donc être recalculés à chaque itération sur  $k$ .

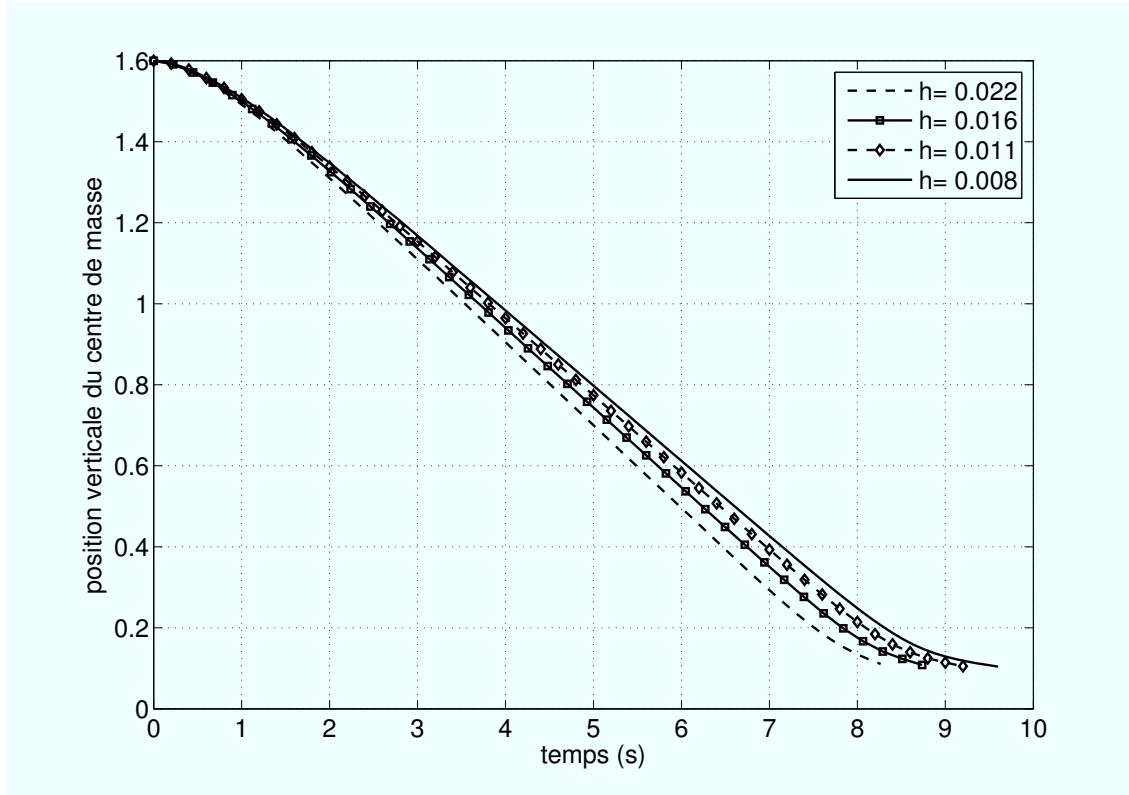
## 1.4 Résultats numériques

On donne à présent quelques résultats et simulations numériques pour le cas d'un ou plusieurs solides rigides. On considère tout d'abord un seul solide rigide  $B(t)$  qui est une boule de rayon  $r = 0.1$  immergée dans le domaine  $\mathcal{O} = [0, 1] \times [0, 2]$ . La position initiale du centre de masse est  $(0.5, 1.6)^\top$ . Les densités du fluide et du rigide sont égales avec  $\rho_f = \rho_s = 1$  et à chaque instant  $t$  on applique une force  $\mathbf{f}$  définie par

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{si } \mathbf{x} \in B(t) \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \setminus B(t). \end{cases} \quad (1.138)$$

La viscosité vaut  $\nu = 0.01$ . On utilise la méthode des caractéristiques standard décrite à la Section 1.2.2 pour le cas des densités homogènes. La figure 1.6 représente les trajectoires du centre de masse pour différentes valeurs du pas de discrétisation  $h$  de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Les différentes valeurs sont  $h = 0.022$ ,  $h = 0.016$ ,  $h = 0.011$  et  $h = 0.008$ . Le pas de discrétisation en temps  $\Delta t$  est déterminé de façon à ce que le rapport  $h/(\Delta t)^2$  soit constant et il est fixé à  $\simeq 140$  (cf. Théorème 1.2.3). Pour la valeur de  $h = 0.008$  correspondant au maillage le plus fin, le pas de discrétisation en temps vaut  $\Delta t = 0.008$ .



FIGURE 1.6 – Trajectoires du centre de masse pour différentes valeurs de  $h$ .

Le tableau 1.1 regroupe les caractéristiques numériques des différents maillages utilisés pour le test de convergence. La dernière colonne du tableau correspond au nombre d'éléments non-nuls (nnz) de la matrice complète du système linéaire (1.101) à résoudre.

$h$	nb de triangles	nb de sommets	nb de degrés de liberté	nnz
0.022	4122	2158	18264	370036
0.016	8192	4193	36579	748274
0.011	16370	8378	73092	1497042
0.008	32768	16577	146883	3024162

TABLE 1.1 – Caractéristiques des différents maillages

Le système linéaire (1.101) est résolu par la méthode itérative MINRES avec préconditionnement. Le système linéaire qu'on doit résoudre correspond à un problème de point selle de la forme  $\mathcal{M}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} H & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

On résout  $P^{-1}\mathcal{M}\mathbf{X} = P^{-1}\mathbf{b}$ , où la matrice  $P$  est proche de  $\mathcal{M}$ , symétrique définie positive et "facile" à inverser. Un choix souvent utilisé pour le préconditionnement  $P$  est donné par (voir [BGL05, Section 10.1.1]) :

$$P = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad (1.139)$$

où la matrice  $S$  est le complément de Schur  $S = B^\top H^{-1}B$ . Pour le système linéaire (1.100), on choisit le préconditionnement diagonal  $P$  donné par

$$P = \left( \begin{array}{c|c} P_A & 0_{2N_f+3, M_f+1} \\ \hline 0_{M_f+1, 2N_f+3} & P_S \end{array} \right), \quad (1.140)$$

où  $P_A$  et  $P_S$  sont les matrices carrées d'ordre  $2N_f + 3$  et  $M_f + 1$  définies par

$$P_A = \left( \begin{array}{c|c} \text{diag}(Q_A) & 0_{2N_f, 3} \\ \hline 0_{3, 2N_f} & I_3 \end{array} \right), \quad P_S = \left( \begin{array}{c|c} \text{diag}(Q_S) & \mathbf{0}_{M_f} \\ \hline \mathbf{0}_{M_f}^\top & 1 \end{array} \right). \quad (1.141)$$

La matrice carrée  $Q_A$  est le bloc  $(2N_f, 2N_f)$  extrait de la matrice  $\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^\top$  du système (1.100), i.e.

$$(Q_A)_{i,j} = (\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^\top)_{i,j} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq 2N_f. \quad (1.142)$$

La matrice carrée  $Q_S$  est d'ordre  $M_f$  et elle est donnée par

$$Q_S = (\mathbf{R} \mathbb{I}_1)^\top P_A^{-1} (\mathbf{R} \mathbb{I}_1). \quad (1.143)$$

Les calculs ont été effectués sur un ordinateur HP Z800 bi-processeur Xeon E5520 cadencé à 2.26GHz. Les performances réalisées sont regroupées dans le tableau 1.2 ci-dessous.

$h$	nb d'itérations	temps CPU
0.022	630	1h01min (5.88s)
0.016	793	2h50min (12.90s)
0.011	932	8h21min (32.25s)
0.008	1201	24h09min (1min12s)

TABLE 1.2 – Temps de calculs pour les différents maillages

Les nombres d'itérations indiqués dans le tableau 1.2 correspondent aux itérations en temps nécessaires pour que la boule atteigne le bord horizontal inférieur  $\{x = 0\}$  du domaine  $\mathcal{O}$ . Les temps indiqués entre parenthèses dans la dernière colonne du tableau 1.2 indiquent les temps de calculs pour une seule itération en temps.

La Figure 1.7 présente le résultat correspondant des simulations de l'état du système fluide-rigide à différents instants avec un pas de discrétisation  $h = 0.008$ .

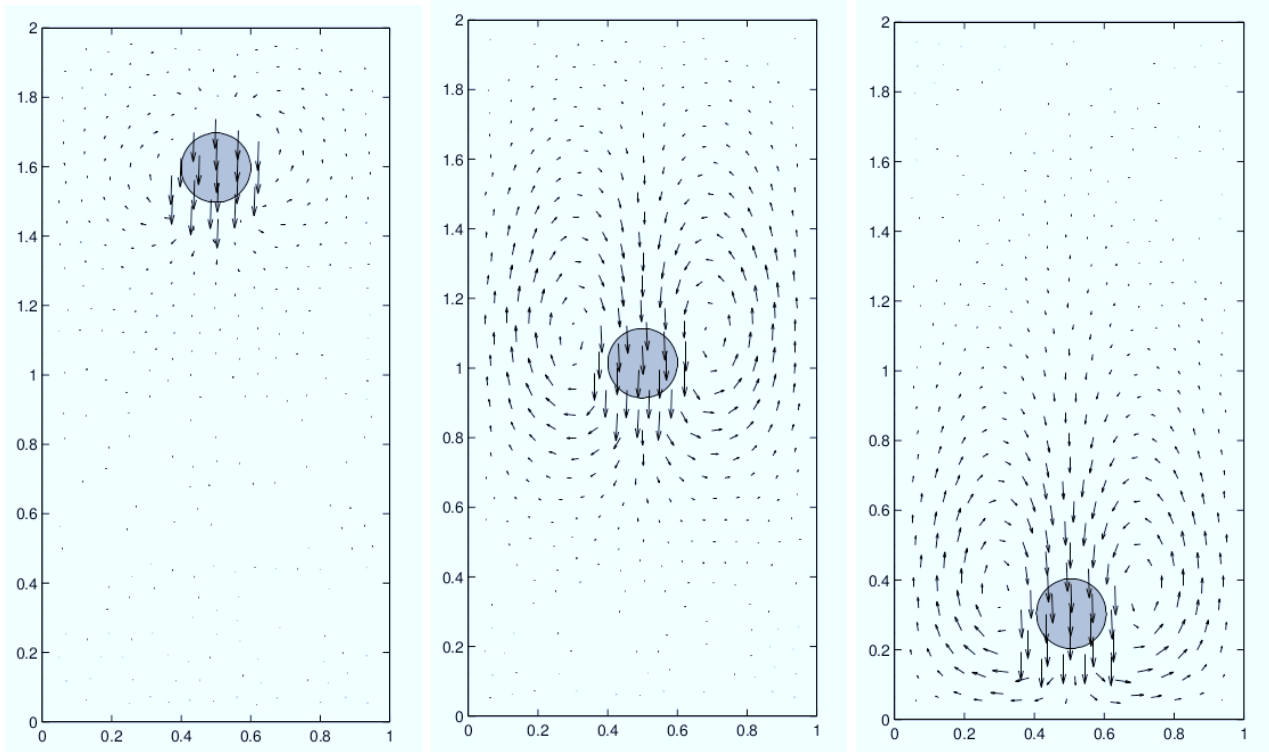


FIGURE 1.7 – Position et champ de vitesse du système fluide-rigide au instants  $t = 0.8$ ,  $t = 3.84$  et  $t = 7.49$ .

L'exemple numérique suivant concerne le cas d'un solide rigide qui est une ellipse soumise à la force de gravité  $\mathbf{f} = (0, -10)^\top$ . L'ellipse a une densité  $\rho_s = 2$  tandis que la densité du fluide vaut  $\rho_f = 1$ . On a utilisé la méthode des caractéristiques modifiée décrite à la Section 1.3.2 pour le cas des densités hétérogènes. La simulation met en évidence la situation physiquement instable lorsque l'ellipse tombe initialement dans le sens du plus grand demi-axe (cf. Figure 1.8).

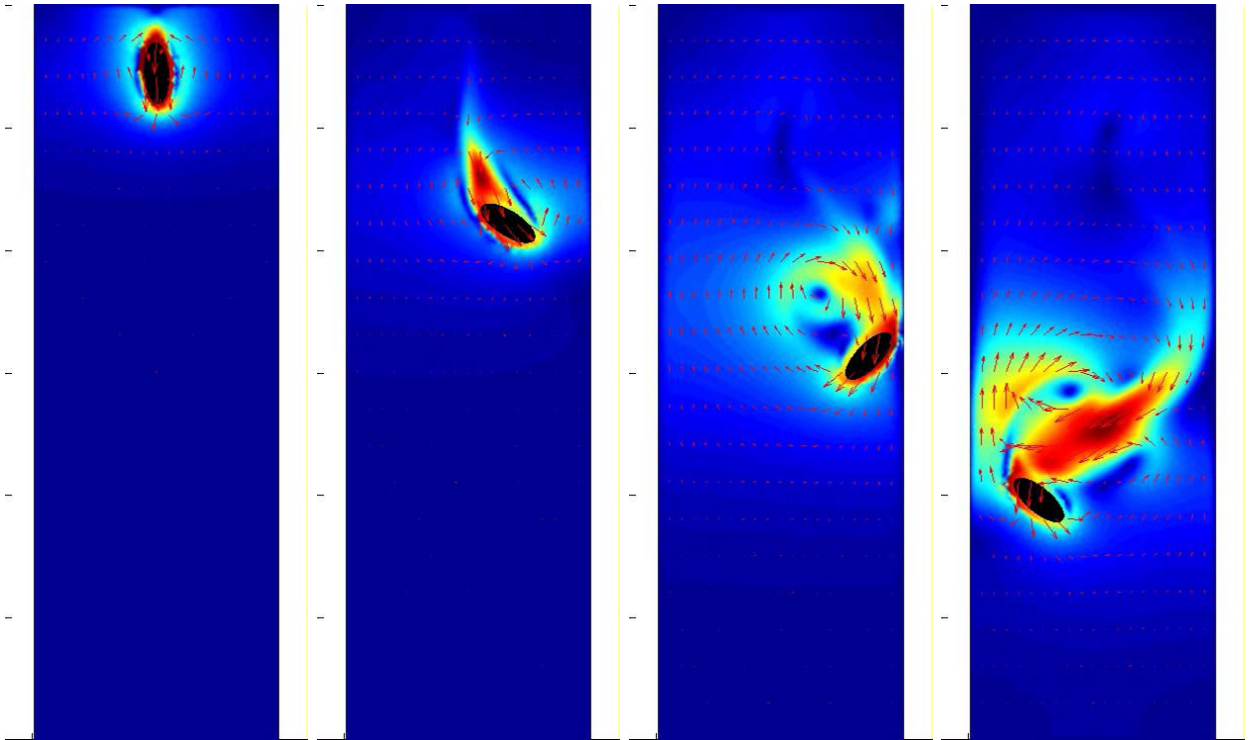


FIGURE 1.8 – Chute d'une ellipse dans le sens du plus grand demi-axe.

Lorsque l'ellipse tombe initialement dans le sens du plus petit demi-axe, la situation est plus stable (cf. Figure 1.9).

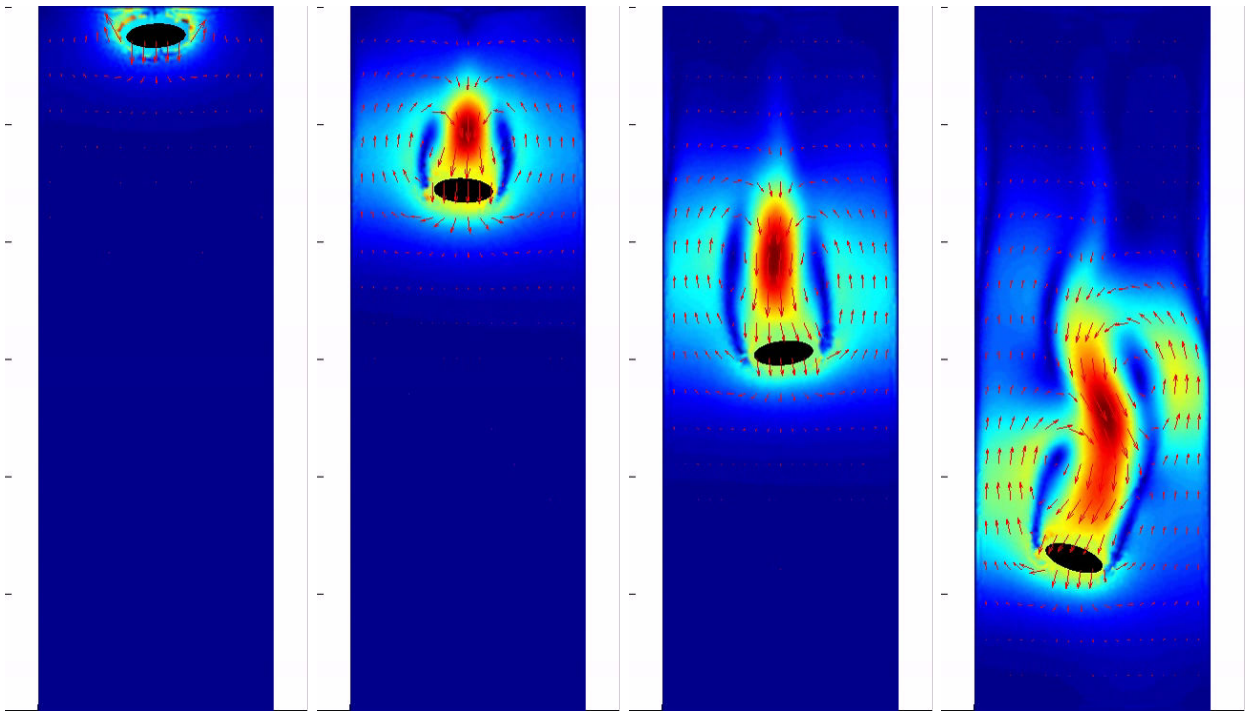


FIGURE 1.9 – Chute d'une ellipse dans le sens du plus petit demi-axe.

L'exemple numérique suivant met en évidence l'effet *tumbling* obtenu lors de la chute de 2 boules. La deuxième boule se trouvant initialement derrière la première boule va parvenir à écarter vers la droite la première boule et se retrouver ainsi devant.

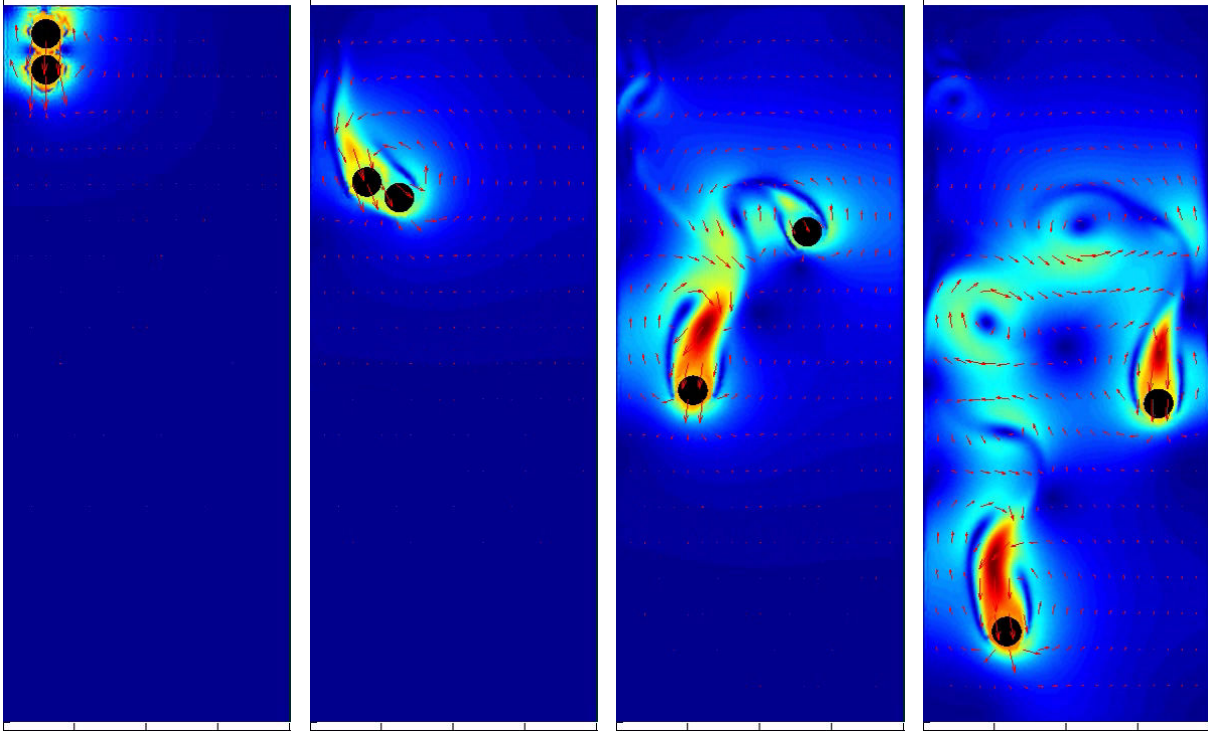


FIGURE 1.10 – Effet *tumbling* lors de la chute de 2 boules.

## Chapitre 2

# Systèmes d'interaction fluide-déformable

### 2.1 Introduction et modélisation

Ce chapitre est consacré à l'approximation d'un système fluide-déformable qui généralise, en un certain sens, le système d'interaction fluide-rigide du chapitre précédent. Le solide est à présent considéré comme déformable, la déformation étant imposée et ne pouvant être modifiée par l'écoulement du fluide. La modélisation ainsi que les méthodes d'approximations sont d'abord présentées pour la dimension 2 d'espace. La fin du chapitre est consacrée à la dimension 3. Le système fluide-déformable considéré représente un modèle simplifié de la nage de poisson. C'est dans ce contexte que les simulations numériques seront présentées en 2D et 3D.

Cette section reprend la modélisation établie par San Martín-Scheid-Takahashi-Tucsna [6] (voir aussi San Martín-Scheid-Smaranda [1]). Le domaine occupé par le solide déformable dans une configuration de référence sera noté  $S_0$  et on suppose que  $S_0$  est un ouvert connexe de bord régulier de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose également que le centre de masse de  $S_0$  coïncide avec l'origine. Le déplacement du solide déformable est déterminé par une application régulière

$$\mathbf{X} : S_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

qui satisfait

$$\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{X}^R(\mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t), t) = \boldsymbol{\xi}(t) + R_{\theta(t)} \mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t), \quad \forall \mathbf{y} \in S_0, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

où  $\boldsymbol{\xi}(t)$  est le centre de masse et  $\theta(t)$  l'angle d'orientation du solide déformable (voir Figure 2.1). L'application  $\mathbf{X}^R : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  représente le déplacement rigide et l'application  $\mathbf{X}^* : S_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  représente la déformation du solide déformable. Le déplacement rigide  $\mathbf{X}^R$  est **inconnu** car  $\boldsymbol{\xi}$  et  $\theta$  sont inconnues. Le déplacement  $\mathbf{X}^R$  résulte de l'interaction avec le fluide. En revanche, la déformation  $\mathbf{X}^*$  est **donnée** et pour tout  $t \geq 0$ , on notera

$$S^*(t) = \mathbf{X}^*(S_0, t). \quad (2.3)$$

On remarquera que le cas  $\mathbf{X}^* = \mathbf{Id}$  où  $\mathbf{Id}$  est l'application identité, correspond au cas d'un solide rigide.

La déformation  $\mathbf{X}^*$  vérifie les hypothèses (H1)–(H4) suivantes (voir [6]).

- |      |  |
|------|--|
| (H1) | <p>Pour tout <math>t \geq 0</math>, l'application <math>\mathbf{y} \mapsto \mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t)</math> est un <math>C^\infty</math>-difféomorphisme de <math>\overline{S_0}</math> sur <math>\overline{S^*(t)}</math>.<br/> De plus, pour tout <math>\mathbf{y} \in S_0</math>, l'application <math>t \mapsto \mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t)</math> est de classe <math>C^\infty([0, \infty))</math> et <math>\mathbf{X}^*(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{y}</math>.</p> |
| (H2) | <p>Le volume total du solide déformable est conservé au cours de la déformation,</p> $\int_{S^*(t)} d\mathbf{x}^* = \int_{S_0} d\mathbf{y}, \quad \forall t \geq 0.$   |

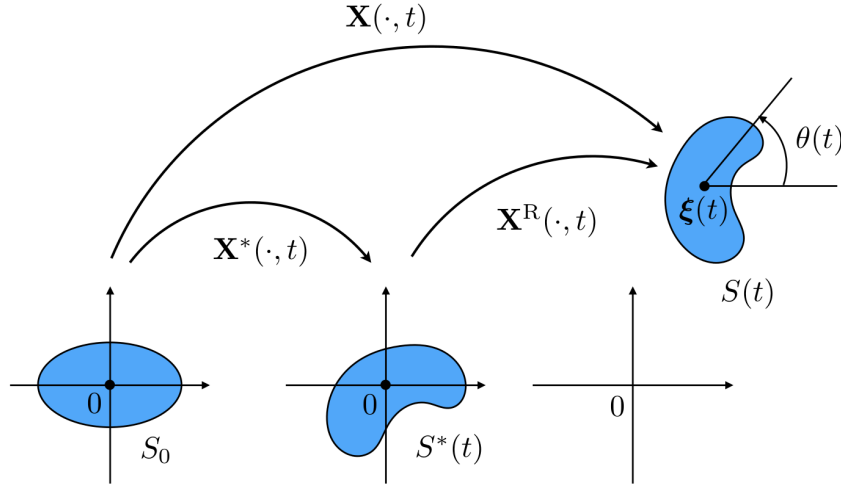


FIGURE 2.1 – Cinématique du solide déformable : déformation et déplacement rigide.

Pour tout  $t \geq 0$ , on désignera par  $\mathbf{Y}^*$  l'inverse de  $\mathbf{X}^*$ , i.e.  $\mathbf{Y}^*$  est le difféomorphisme vérifiant

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{Y}^*(\mathbf{x}^*, t), t) = \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{Y}^*(\mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t), t) = \mathbf{y},$$

pour tout  $\mathbf{x}^* \in S^*(t)$ ,  $t \geq 0$  et  $\mathbf{y} \in S_0$ . Par ailleurs, on note  $\mathbf{w}^*$  la vitesse de déformation du solide déformable :

$$\mathbf{w}^*(\mathbf{x}^*, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial t}(\mathbf{y}, t) \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{Y}^*(\mathbf{x}^*, t)}, \quad \forall \mathbf{x}^* \in S^*(t), \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

Soient  $\rho_{S,0}$  la densité du solide déformable dans la configuration de référence  $S_0$  et  $\rho_S^*(t)$  la densité de  $S^*(t)$ . Le principe de conservation de la masse appliqué au solide déformable se traduit par

$$\int_{S^*(t)} \rho_S^*(\mathbf{x}^*, t) d\mathbf{x}^* = \int_{S_0} \rho_{S,0}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.5)$$

et en appliquant le principe local de conservation de la masse, on obtient

$$\rho_S^*(\mathbf{x}^*, t) = \frac{\rho_{S,0}(\mathbf{Y}^*(\mathbf{x}^*, t))}{\det(\nabla \mathbf{X}^*)(\mathbf{Y}^*(\mathbf{x}^*, t))}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}^* \in S^*(t), \quad (2.6)$$

où  $\nabla \mathbf{X}^*$  désigne la matrice jacobienne de  $\mathbf{X}^*(\cdot, t)$ .

$$(H3) \quad \left| \quad \text{Pour tout } t \geq 0, \quad \int_{S^*(t)} \rho_S^*(\mathbf{x}^*, t) \mathbf{w}^*(\mathbf{x}^*, t) d\mathbf{x}^* = 0. \right.$$

$$(H4) \quad \left| \quad \text{Pour tout } t \geq 0, \quad \int_{S^*(t)} \rho_S^*(\mathbf{x}^*, t) \mathbf{x}^{*\perp} \cdot \mathbf{w}^*(\mathbf{x}^*, t) d\mathbf{x}^* = 0. \right.$$

Les conditions (H3), (H4) correspondent à ce qui est habituellement appelé *conditions d'auto-propulsion*. Ces contraintes sont naturelles dans les mécanismes de la nage vue comme un phénomène d'auto-propulsion. En particulier, les hypothèses (H1) et (H3) impliquent que la position du centre de masse du solide déformable ne change pas durant la déformation, c'est-à-dire :

$$\int_{S_0} \rho_{S,0}(\mathbf{y}) \mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.7)$$

D'après (2.2), le domaine occupé par le solide déformable à l'instant  $t$  est donné par

$$S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t) = \boldsymbol{\xi}(t) + R_{\theta(t)} S^*(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

En dérivant la relation (2.2) par rapport à  $t$ , on obtient la vitesse eulérienne  $\mathbf{u}_S$  du solide. Pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\xi}'(t) + \theta'(t)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t), \quad (2.9)$$

où

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = R_{\theta(t)} \mathbf{w}^*(R_{-\theta(t)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)), t), \quad \forall \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t). \quad (2.10)$$

La densité eulérienne du solide déformable est donnée par

$$\rho_S(\mathbf{x}, t) = \rho_S^*(R_{-\theta(t)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)), t), \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t), \quad (2.11)$$

où  $\rho_S^*$  est donné par (2.6).

**Remarque 2.1.1** Dans le cas où  $\mathbf{X}^* = \mathbf{Id}$  (solide rigide), toutes les hypothèses (H1)–(H4) sont satisfaites et la vitesse de déformation  $\mathbf{w}^*$  est nulle.

Le système fluide-solide occupe le domaine borné  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$  de bord régulier  $\partial\mathcal{O}$ . Quand il n'y a pas de confusion possible, on notera simplement  $S(t) = S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t)$  le domaine occupé par le solide déformable à l'instant  $t$ . Le fluide remplit le domaine  $F(t) = F(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t) = \mathcal{O} \setminus S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t)$ . Les inconnues du système complet fluide-solide déformable sont la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  du fluide ainsi que la position  $\boldsymbol{\xi}$  et l'angle d'orientation  $\theta$  du solide déformable. Le système fluide-solide déformable s'écrit, pour  $t \in [0, T]$ ,

$$\rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho_f \mathbf{f} \quad \text{dans } F(t), \quad (2.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } F(t), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}'(t) + \theta'(t)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \partial S(t), \quad (2.15)$$

$$m \boldsymbol{\xi}''(t) = - \int_{\partial S(t)} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\Gamma + \int_{S(t)} \rho_s(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (2.16)$$

$$(J\theta')'(t) = - \int_{\partial S(t)} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\Gamma + \int_{S(t)} \rho_s(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (2.17)$$

Les conditions initiales du système (2.12)–(2.17) sont données par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in F(0), \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\xi}'(0) = \boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{R}^2, \quad \theta(0) = \theta_0 = 0, \quad \theta'(0) = \omega_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Dans le système ci-dessus, les constantes  $\rho_f > 0$  et  $\nu > 0$  désignent la densité et la viscosité du fluide. Les autres paramètres sont les mêmes que ceux définis à la section 1.1.1 du chapitre 1 pour le cas d'un solide rigide. En particulier,  $m$  désigne la masse du solide déformable (qui est constante d'après (2.5)) et  $J$  est l'inertie du solide déformable définie par (1.9). On remarquera que l'inertie n'est généralement pas conservée durant la déformation (contrairement au cas d'un solide rigide avec  $\mathbf{X}^* = \mathbf{Id}$ ).



## 2.2 Formulation faible globale

Les notations utilisées dans cette section sont celles introduites à la section 1.1.2 du Chapitre 1. Commençons par donner un résultat d'existence et d'unicité de solution forte pour le système (2.12)–(2.19). Ce résultat a été établi dans [6].

**Théorème 2.2.1** *Supposons que la déformation  $\mathbf{X}^*$  satisfasse les hypothèses (H1)–(H4). Par ailleurs, on suppose que les données initiales vérifient  $\mathbf{u}_0 \in H^1(F(0))^2$  et*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0 & \text{dans } F(0), \\ \mathbf{u}_0 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\xi}_1 + \omega_0(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_0)^\perp + \mathbf{w}^*(\mathbf{x}, 0) & \text{sur } \partial S(0), \\ \operatorname{dist}(S(0), \partial\mathcal{O}) > 0. \end{cases}$$

Alors, il existe un temps maximal  $T_{\max} > 0$  tel que :

- Pour tout  $T \in (0, T_{\max})$ , le système (2.12)–(2.19) admet une unique solution forte  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \theta)$  sur  $[0, T]$  telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; H^2(F(t))^2) \cap H^1(0, T; L^2(F(t))^2) \cap C([0, T]; H^1(F(t))^2), \\ p &\in L^2(0, T; H^1(F(t))), \quad \boldsymbol{\xi} \in H^2(0, T)^2, \quad \theta \in H^2(0, T). \end{aligned}$$

- De plus, l'alternative suivante a lieu :

soit

$$(i) \quad T_{\max} = \infty,$$

ou bien

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \operatorname{dist}(S(t), \partial\mathcal{O}) = 0.$$

Soit  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \theta)$  une solution forte de (2.12)–(2.19) (au sens du Théorème 2.2.1). On étend le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  à tout le domaine  $\mathcal{O}$  en définissant

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\xi}'(t) + \theta'(t)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad \text{si } \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t), \quad (2.20)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{si } \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t). \quad (2.21)$$

Le champ de vecteur ainsi étendu  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  appartient à  $H_0^1(\mathcal{O})^2$ . On supposera désormais que la solution  $\mathbf{u}$  et  $p$  du système (2.12)–(2.19) est étendue selon (2.20), (2.21).

On a besoin également d'étendre la densité du solide déformable (définie par (2.11)) à tout le domaine  $\mathcal{O}$  en définissant, pour  $t \geq 0$ ,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \rho_S(\mathbf{x}, t) & \text{si } \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t), \\ \rho_F & \text{si } \mathbf{x} \in F(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t). \end{cases} \quad (2.22)$$

En reprenant un argument de Ladyzhenskaya [Lad69, p.27], on montre que, pour tout  $\delta > 0$ , il existe une fonction continue  $(\mathbf{x}^*, t) \mapsto \Lambda^*(\mathbf{x}^*, t)$  telle que, pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $\mathbf{x}^* \mapsto \Lambda^*(\mathbf{x}^*, t)$  est dans  $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus S^*(t))$  et pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \Lambda^* &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{S^*(t)}, \\ \Lambda^*(\mathbf{x}^*, t) &= 0 & \text{si } \operatorname{dist}(\mathbf{x}^*, S^*(t)) \geq \delta > 0, \\ \Lambda^*(\mathbf{x}^*, t) &= \mathbf{w}^*(\mathbf{x}^*, t) & \text{si } \mathbf{x}^* \in S^*(t). \end{cases} \quad (2.23)$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , on définit alors la fonction  $\Lambda(\cdot, t)$  par

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = R_{\theta(t)} \Lambda^*(R_{-\theta(t)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)), t), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.24)$$

La fonction  $\Lambda$  vérifie alors

$$\begin{cases} \operatorname{div} \Lambda = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t)}, \\ \Lambda = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}, \\ \Lambda = \mathbf{w} & \text{dans } S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t). \end{cases} \quad (2.25)$$

**Proposition 2.2.2** *Soient*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; H^2(F(t))^2) \cap H^1(0, T; L^2(F(t))^2) \cap C([0, T]; H^1(F(t))^2), \\ p &\in L^2(0, T; H^1(F(t))), \quad \boldsymbol{\xi} \in H^2(0, T)^2, \quad \theta \in H^2(0, T). \end{aligned}$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , on suppose que  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  et  $p(\cdot, t)$  sont étendues à tout le domaine  $\mathcal{O}$  par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\xi}'(t) + \omega(t)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\perp + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t), \quad (2.26)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t). \quad (2.27)$$

Alors  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \theta)$  est la solution du système (2.12)–(2.19) si et seulement si pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{u}(\cdot, t) - \Lambda(\cdot, t; \boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)) \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t))$ ,  $p(\cdot, t) \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t))$  et  $(\mathbf{u}, p)$  vérifient pour presque tout  $t \in (0, T)$ ,

$$\left( \rho \frac{d}{dt} [\mathbf{u} \circ \boldsymbol{\psi}](t), \boldsymbol{\varphi} \right) + a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p) = (\rho \mathbf{f}(t), \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \quad (2.28)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t)), \quad (2.29)$$

où les formes  $a$  et  $b$  sont définies par (1.25), (1.26), la fonction caractéristique  $\boldsymbol{\psi}$  est définie par (1.16) et la densité  $\rho$  est étendue par (2.22).

Désormais dans tout le chapitre, on suppose que  $\mathbf{f}$  et la donnée initiale  $\mathbf{u}_0$  vérifient

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &\in C([0, T]; H^1(\mathcal{O})^2), \quad \mathbf{u}_0 \in H^2(\mathcal{F})^2, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}_0) = 0 \quad \text{dans } F(0), \\ \mathbf{u}_0 &= 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_1 + \omega_0(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_0)^\perp + \mathbf{w}^*(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_0, 0) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \partial S(0), \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{R}^2$  et  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  sont les données initiales dans (2.18). On supposera également que la solution correspondante  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \theta)$  du système (2.12)–(2.19) satisfait

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in C([0, T]; H^2(F(t))^2) \cap H^1(0, T; L^2(F(t))^2), \\ D^2 \mathbf{u} / Dt^2 \in L^2(0, T; L^2(F(t))^2), \quad \mathbf{u} \in C([0, T]; C^{0,1}(\overline{\mathcal{O}})^2) \\ p \in C([0, T]; H^1(F(t))), \quad \boldsymbol{\xi} \in H^3(0, T)^2, \quad \theta \in H^3(0, T) \end{cases} \quad (2.31)$$

et

$$\operatorname{dist}(S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t), \partial\mathcal{O}) > 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.32)$$

## 2.3 Méthodes de Lagrange-Galerkin

Dans cette section, on décrit deux schémas complets de discrétisation en espace et en temps associée à la formulation globale (2.28), (2.29). Ces deux schémas diffèrent par la construction de la fonction caractéristique. Le premier schéma utilise une caractéristique standard analogue au cas d'un solide rigide avec les densités homogènes (cf. Section 1.2 du Chapitre 1). Ce schéma est présenté dans [6] dans le cas d'une semi-discrétisation en temps. Le second schéma présenté est basé sur une fonction caractéristique modifiée à l'instar de ce qui a été fait pour un solide rigide avec des

densités hétérogènes (cf. Section 1.3 du Chapitre 1). Cette caractéristique modifiée prend en compte la vitesse de déformation. Le schéma complet correspondant est présenté dans [1].

Tout au long de cette section, les notations utilisées seront celles introduites à la Section 1.2 du Chapitre 1. On décrit à présent le schéma complet général sans préciser pour le moment la fonction caractéristique approchée.

On suppose qu'on connaît une solution approchée  $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k, \boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  de (2.12)-(2.19) à l'instant  $t = t_k$  et on veut calculer la solution approchée  $(\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}, \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  à l'instant suivant  $t = t_{k+1}$ . On introduit la fonction densité approchée  $\rho_h^k$  définie par

$$\rho_h^k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_S^* \left( R_{-\theta_h^k}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^k), t_k \right) & \text{si } \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k), \\ \rho_F & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \setminus S(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k), \end{cases} \quad (2.33)$$

et on définit la vitesse approchée de déformation  $\Lambda_h^k$  par

$$\Lambda_h^k(\mathbf{x}) = R_{\theta_h^k} \Lambda^* \left( R_{-\theta_h^k}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^k), t_k \right), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.34)$$

**Calcul de la nouvelle position  $(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$ .** On calcule tout d'abord les positions  $\boldsymbol{\xi}_h^{k+1} \in \mathbb{R}^2$  et  $\theta_h^{k+1} \in \mathbb{R}$  par

$$\boldsymbol{\xi}_h^{k+1} = \boldsymbol{\xi}_h^k + \mathbf{u}_h^k(\boldsymbol{\xi}_h^k) \Delta t, \quad (2.35)$$

$$\theta_h^{k+1} = \theta_h^k + \frac{\Delta t}{J(t_k)} \int_{S(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)} \rho_h^k(\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h^k(\boldsymbol{\xi}_h^k)) \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^k)^\perp d\mathbf{x}, \quad (2.36)$$

où  $\rho_h^k$  est définie par la relation (2.33) et  $J(t_k)$  est l'inertie du solide déformable à l'instant  $t_k$  (cf. (1.9)).

**Schéma de discrétisation espace-temps.** On utilise les espaces d'Eléments Finis  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  et  $\mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  définis par (1.41) et (1.42). On calcule la solution  $\mathbf{u}_h^{k+1} \in \Lambda_h^{k+1} + \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$ ,  $p_h^{k+1} \in \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  du problème mixte suivant

$$\begin{aligned} \left( \rho_h^{k+1} \frac{\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \overline{\mathbf{X}}_h^k}{\Delta t}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h^{k+1}) \\ = (\rho_h^{k+1} \mathbf{f}_h^{k+1}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$b(\mathbf{u}_h^{k+1}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}), \quad (2.38)$$

où  $\mathbf{f}_h^{k+1}$  est la projection  $L^2(\mathcal{O})^2$  de  $\mathbf{f}(t^{k+1})$  sur  $(E_h)^2$  (cf. (1.40)).

Dans l'équation (2.37),  $\overline{\mathbf{X}}_h^k$  désigne une approximation à l'instant  $t_k$  de la fonction caractéristique  $\psi$  définie par (1.16). On présente deux constructions possibles de cette caractéristique approchée.

### 2.3.1 Méthode standard des caractéristiques dans le cas déformable

Dans cette première construction, la caractéristique approchée  $\overline{\mathbf{X}}_h^k$  est définie de façon analogue au cas d'un solide rigide avec les densités homogènes (cf. Section 1.2 du Chapitre 1). Il s'agit du schéma présenté dans [6] dans le cas d'une semi-discrétisation en temps. Comme à la Section 1.2 du Chapitre 1, on définit la fonction caractéristique  $\psi_h$  comme la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overline{\psi}_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{P} \mathbf{u}_h^k(\overline{\psi}_h(t; t_{k+1}, \mathbf{x})), & \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \overline{\psi}_h(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad (2.39)$$

et on définit

$$\overline{\mathbf{X}}_h^k(\mathbf{x}) = \overline{\psi}_h(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \quad (2.40)$$

Dans (2.39),  $\mathbf{P}\mathbf{u}_h^k$  désigne la projection orthogonale de  $\mathbf{u}_h^k$  sur l'espace  $\mathcal{R}_h$  défini par (1.43).

### 2.3.2 Méthode des caractéristiques modifiées pour le cas déformable

Compte tenu des remarques faites à la Section 1.3.1 du Chapitre 1 et relatives à la difficulté d'obtenir un résultat de convergence du schéma avec la caractéristique standard pour une fonction densité non constante et non continue (cf. (1.109)), on est amené à introduire une nouvelle caractéristique approchée adaptée au cas déformable. Cette caractéristique approchée généralise la définition de la caractéristique modifiée introduite à la Section 1.3 du Chapitre 1 pour traiter le cas d'un solide rigide avec des densités hétérogènes. Ce schéma associé à cette nouvelle caractéristique est présenté dans [1].

On notera  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  la projection orthogonale de  $L^2(\mathcal{O})^2$  dans  $\mathcal{R}_h(\boldsymbol{\xi}, \theta)$ , où l'espace  $\mathcal{R}_h(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  est défini par (1.118). On introduit également la fonction caractéristique  $\Pi$  associée à la vitesse de déformation étendue  $\Lambda^*$ . Pour tout  $s \in [0, T]$  et  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ , la fonction  $\Pi(\cdot; s, \mathbf{z})$  est la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Pi(t; s, \mathbf{z}) = \Lambda^*(\Pi(t; s, \mathbf{z}), t), & t \in [0, T], \\ \Pi(s; s, \mathbf{z}) = \mathbf{z}. \end{cases} \quad (2.41)$$

On introduit alors la fonction caractéristique approchée  $\chi_h^k$  définie comme la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\chi_h^k(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}_h^k(\chi_h^k(t; t_{k+1}, \mathbf{x})), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ \psi_h^k(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_h^k + R_{\theta_h^k}\Pi\left(t_k; t_{k+1}, R_{-\theta_h^{k+1}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1})\right), \end{cases} \quad (2.42)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^k(\mathbf{z}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) \left( \mathbf{u}_h^k(\mathbf{z}) - \mathbf{u}_h^k(\boldsymbol{\xi}_h^k) - \frac{\theta_h^{k+1} - \theta_h^k}{\Delta t} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\xi}_h^k)^\perp \right) - \Lambda_h^k(\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2,$$

où  $\mathbf{u}_h^k(\mathbf{z})$  est étendue à zéro en dehors du domaine  $\mathcal{O}$ .

Finalement, on définit

$$\overline{\mathbf{X}}_h^k(\mathbf{x}) = \chi_h^k(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \quad (2.43)$$

La caractéristique  $\overline{\mathbf{X}}_h^k$  possède la propriété d'envoyer le solide déformable  $S(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  sur  $S(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  :

$$\overline{\mathbf{X}}_h^k(S(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})) = S(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k). \quad (2.44)$$

En effet, si  $\mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$ , on peut montrer facilement que  $\overline{\mathbf{X}}_h^k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_h^k + R_{\theta_h^k} \mathbf{X}^*(\mathbf{Y}^*(\mathbf{z}, t_{k+1}), t_k)$  avec  $\mathbf{z} = R_{-\theta_h^{k+1}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}) \in S^*(t_{k+1})$ . On a  $\mathbf{X}^*(\mathbf{Y}^*(\mathbf{z}, t_{k+1}), t_k) \in S^*(t_k)$  et par conséquent  $\overline{\mathbf{X}}_h^k(\mathbf{x}) \in S(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$ . Réciproquement, on a  $S(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k) \subset \overline{\mathbf{X}}_h^k(S(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}))$ .

## 2.4 Système linéaire

On se place dans le même contexte d'approximation qu'à la Section 1.2.4 du Chapitre 1 pour le cas d'un solide rigide. On renvoie donc à cette section pour la définition (1.64) et (1.66) des espaces d'Eléments Finis  $\mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  et  $\mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  utilisés ainsi que les ensembles d'indices des degrés de liberté  $I_{s,2}$ ,  $I_{f,2}$ , etc.

La vitesse  $\mathbf{u}_h^k \in \Pi\Lambda_h^k + \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  et la pression  $p_h^k \in \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  se décomposent en

$$\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_{f,2}} u_i^k \Phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 \eta_j^k \mathbf{L}_j(\mathbf{x}) + \Pi\Lambda_h^k(\mathbf{x}) \quad (2.45)$$

$$p_h^k(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_{f,1}} p_i^k v_i(\mathbf{x}). \quad (2.46)$$

La fonction  $\Pi\Lambda_h^k$  est l'interpolant dans l'espace d'Eléments Finis  $W_h = V_h \times V_h$  (voir (1.55)) de la fonction  $\Lambda_h^k$  définie par (2.34). En d'autre terme,

$$\Pi\Lambda_h^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2N} w_i^k \Phi_i(\mathbf{x}), \quad (2.47)$$

avec  $w_i^k = \Lambda_h^k(P_i)$  où les  $(P_i)$  sont les degrés de libertés de  $W_h$  (i.e. les sommets et milieux des arêtes des triangles de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  pour l'espace  $V_h$  des fonctions  $\mathbb{P}_2$  sur chaque triangle) et  $\Lambda_h^k$  est définie par (2.34).

Compte tenu de (1.65) et de (2.47), la décomposition (2.45) de la vitesse  $\mathbf{u}_h^k$  se réécrit sous la forme

$$\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2N_f+3} U_i^k \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{2N} w_i^k \Phi_i(\mathbf{x}), \quad (2.48)$$

avec la correspondance  $(U_1^k, \dots, U_{2N_f+3}^k) = (u_1^k, \dots, u_{2N_f}^k, \eta_1^k, \eta_2^k, \eta_3^k)$ . On rappelle que les valeurs  $(\eta_1^k, \eta_2^k)^\top$  et  $\eta_3^k$  dans (2.45) représentent (comme dans le cas rigide) les approximations de la vitesse exacte du centre de masse et la vitesse angulaire exacte du solide rigide à l'instant  $t_k$ , i.e.  $(\eta_1^k, \eta_2^k)^\top \simeq \boldsymbol{\xi}'(t_k)$  et  $\eta_3^k \simeq \theta'(t_k)$ .

A l'instant  $t_{k+1}$ , la nouvelle position approchée du solide est déterminée en calculant

$$\boldsymbol{\xi}_h^{k+1} = \boldsymbol{\xi}_h^k + \begin{pmatrix} \eta_1^k \\ \eta_2^k \end{pmatrix} \Delta t, \quad \theta_h^{k+1} = \theta_h^k + \eta_3^k \Delta t. \quad (2.49)$$

On détermine ensuite  $\mathbf{u}_h^{k+1} \in \Pi\Lambda_h^{k+1} + \mathcal{K}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  et la pression  $p_h^{k+1} \in \mathcal{M}_h(\boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$  en injectant les décompositions (2.48), (2.46) dans la formulation (2.37)-(2.38). On obtient ainsi

$$\sum_{i=1}^{2N_f+3} U_i^{k+1} \alpha(\phi_i, \phi_j) + \sum_{i \in I_{f,1}} p_i^{k+1} b(\phi_j, v_i) = g^k(\phi_j) - \sum_{i=1}^{2N} w_i^{k+1} \alpha(\Phi_i, \phi_j) \quad (2.50)$$

$$\sum_{i=1}^{2N_f^{k+1}+3} U_i^{k+1} b(\phi_i, v_l) = - \sum_{i=1}^{2N} w_i^{k+1} b(\Phi_i, v_l) \quad (2.51)$$

pour  $j = 1, \dots, 2N_f + 3$ ,  $l = 1, \dots, M_f$  et avec

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\Delta t} \left( \rho_h^{k+1} \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{et} \quad g(\mathbf{v}) = \frac{1}{\Delta t} \left( \rho_h^{k+1} \mathbf{u}_h^k \circ \bar{\mathbf{X}}_h^k, \mathbf{v} \right), \quad (2.52)$$

où  $\rho_h^{k+1}$  est définie par (2.33). Puisque  $\mathcal{K}_h(\xi_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}) \subset W_h$ , on peut décomposer les fonctions  $\phi_i$  sur les fonctions de base  $\{\Phi_j\}$  avec  $\phi_i = \sum_{j=1}^{2N} \mu_{ij} \Phi_j$  et on obtient alors en particulier

$$\alpha(\Phi_i, \phi_j) = \sum_{l=1}^{2N} \mu_{jl} \alpha(\Phi_i, \Phi_l) = (\mathbf{R}\mathbf{A})_{ji} \quad (2.53)$$

où on a noté (cf. (1.77))

$\mathbf{A}$  une matrice de taille  $2N \times 2N$  avec  $A_{ij} = \alpha(\Phi_i, \Phi_j)$ ,

$\mathbf{R}$  est une matrice de taille  $(2N_f + 3) \times 2N$  avec  $R_{ij} = \mu_{ij}$ .

Le système linéaire (2.50)-(2.51) s'écrit alors

$$\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^\top \mathbf{U} + \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbb{I}_1 \mathbf{P} = \mathbf{R}(\mathbf{G} - \mathbf{A}\mathbf{W}) \quad (2.54)$$

$$(\mathbf{R}\mathbf{B}\mathbb{I}_1)^\top \mathbf{U} = -(\mathbf{B}\mathbb{I}_1)^\top \mathbf{W} \quad (2.55)$$

où les inconnues sont les vecteurs vitesse  $\mathbf{U}$  et pression  $\mathbf{P}$  définis par :

$$\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_{2N_f}, \eta_1, \eta_2, \eta_3)^\top \in \mathbb{R}^{2N_f+3}, \quad \mathbf{P} = (p_1, \dots, p_{M_f})^\top \in \mathbb{R}^{M_f}. \quad (2.56)$$

Les matrices  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbb{I}_1$  et le vecteur  $\mathbf{G}$  sont définis à la Section 1.2.4 du Chapitre 1 en (1.77) et (1.81). Le vecteur  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{2N}$  est défini par

$$\mathbf{W} = (w_1, \dots, w_{2N})^\top,$$

avec les  $w_i$  donnés par (2.47). Le système (2.54)-(2.55) s'écrit encore sous la forme

$$\mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^\top \mathbf{X} = \mathcal{P}(\mathcal{G} - \mathcal{A}\mathcal{W}). \quad (2.57)$$

On rappelle que la matrice  $\mathcal{A}$  de taille  $(2N + M) \times (2N + M)$  et la matrice  $\mathcal{P}$  de taille  $(2N_f + 3 + M_f) \times (2N + M)$  sont données par (voir (1.83) et (1.86)) :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & 0_{M,M} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & 0_{2N_f+3,M} \\ 0_{M_f,2N} & \mathbb{I}_1^\top \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

et le vecteur  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^M$  vaut (cf. (1.84))

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0}_M \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Le vecteur  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{2N+M}$  est défini par

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{0}_M \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Le vecteur  $\mathbf{X}$  des inconnues représentant la vitesse et la pression approchées à l'instant  $t_{k+1}$ , est donné par

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \underbrace{(U_1, \dots, U_{2N_f})}_{\text{vitesses fluide}}, \underbrace{(\eta_1, \eta_2, \eta_3)}_{\substack{\text{vitesse} \\ \text{rigide}}}, \underbrace{(p_1, \dots, p_{M_f})}_{\text{pression fluide}})^\top \in \mathbb{R}^{2N_f+3+M_f}. \quad (2.61)$$

**Calcul de la vitesse approchée  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  sur le maillage  $\mathcal{T}_h$ .** Une fois que la solution  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$  du système (2.57) calculée, on détermine la vitesse  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  avec la décomposition sur l'espace  $W_h$  de la façon suivante :

$$\mathbf{u}_h^{k+1} = \sum_{i=1}^{2N_f+3} U_i^{k+1} \phi_i + \sum_{j=1}^{2N} w_j^{k+1} \Phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2N_f+3} \sum_{j=1}^{2N} U_i^{k+1} \mu_{ij} \Phi_j + \sum_{j=1}^{2N} w_j^{k+1} \Phi_j(\mathbf{x}),$$

de telle sorte que

$$\mathbf{u}_h^{k+1} = \sum_{j=1}^{2N} \left( \left( \mathbf{R}^\top \mathbf{U} \right)_j + w_j^{k+1} \right) \Phi_j.$$

Les valeurs de la vitesse approchée  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  sur les noeuds du maillage  $\mathbb{P}_2$  sont donc données par le vecteur  $\mathbf{R}^\top \mathbf{U} + \mathbf{W}$ .

## 2.5 Modèle de déformation pour la nage de poisson

Dans cette section, on décrit un modèle de déformation pour la nage de poisson. La déformation imposée pour modéliser le mouvement propre d'un poisson dépend bien évidemment de l'organisme et de l'espèce animale que l'on cherche à imiter (voir par exemple [CWB98], [LK99]). On choisit une loi de déformation inspirée par Leroyer-Visonneau [LV05]. La déformation du corps déformable est donnée par un modèle géométrique de poutre, encore appelé *modèle de Kirchhoff*. Plus précisément, on considère que durant la déformation, les sections droites du corps déformable restent orthogonales à l'axe moyen du corps (voir Figure 2.2).

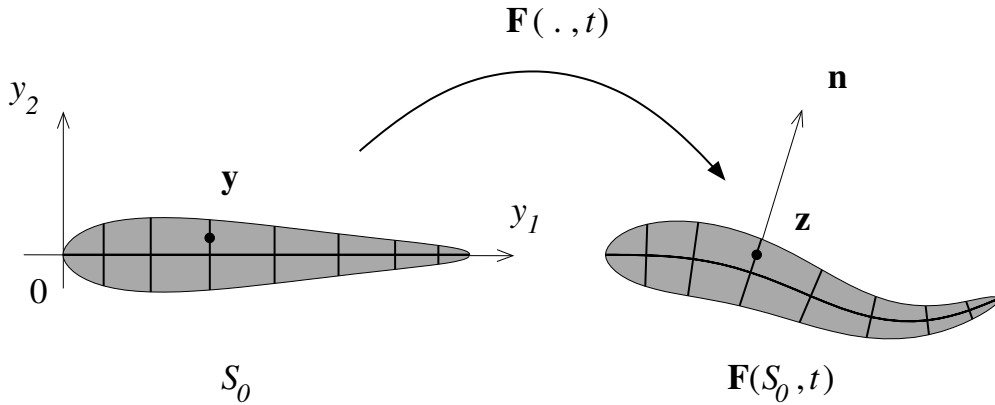


FIGURE 2.2 – Le modèle géométrique de poutre pour la déformation  $\mathbf{F}$ .

Le domaine de référence  $S_0$  est supposé symétrique par rapport à l'axe horizontal. Plus précisément, on a

$$S_0 = \{ (y_1, y_2) \in [0, l] \times \mathbb{R}, y_2 \in [-\gamma(y_1), \gamma(y_1)] \} \quad (2.62)$$

où  $\gamma \in C^\infty(0, l) \cap C([0, l])$  est une fonction positive telle que  $\gamma(0) = \gamma(l) = 0$ ,  $\gamma'(0) = \infty$  et  $\gamma'(l) = -\infty$ . Les conditions sur les dérivées de  $\gamma$  sont nécessaires pour assurer la régularité de la frontière de  $S_0$ .

Afin de définir la déformation  $\mathbf{X}^*$ , on introduit la déformation intermédiaire  $\mathbf{F}$  définie, pour tout  $t \geq 0$ , par

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\cdot, t) : S_0 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{y} = (y_1, y_2) &\mapsto \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{f}(y_1, t) + y_2 \mathbf{n}(y_1, t), \end{aligned} \quad (2.63)$$

où  $\mathbf{f}(\cdot, t) = (f_1(\cdot, t), f_2(\cdot, t))^T \in C^\infty([0, l], \mathbb{R}^2)$  est la paramétrisation par l'abscisse curviligne  $y_1$  de l'axe moyen du solide déformé à l'instant  $t$ , c'est-à-dire que l'on a  $\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1}(\cdot, t) \right| \equiv 1$  pour tout  $t \geq 0$ . Le vecteur  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire défini par  $\mathbf{n} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1} \right)^T$ .

Pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)$  est de classe  $C^\infty(S_0, \mathbb{R}^2)$  et le jacobien de  $F$  vaut

$$\det(\nabla \mathbf{F})(\mathbf{y}, t) = 1 - y_2 \kappa(y_1, t) \quad \text{pour tout } t \geq 0, \mathbf{y} \in S_0, \quad (2.64)$$

où  $\kappa(y_1, t)$  désigne la courbure de l'axe moyen  $\mathbf{f}(\cdot, t)$  au point d'abscisse  $y_1$  et à l'instant  $t$ . La courbure  $\kappa$ , le vecteur normal  $\mathbf{n}$  et le vecteur unitaire tangent  $\mathbf{t} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1} \right)$  sont liés par les formules de Frenet :

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial y_1} = \kappa \mathbf{n}, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y_1} = -\kappa \mathbf{t}. \quad (2.66)$$

Par ailleurs, pour tout  $t \in (0, T)$ , on suppose que

$$\inf_{y_1 \in (0, l)} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_1, t) > 0, \quad \sup_{y_1 \in (0, l)} |\kappa(y_1, t) \gamma(y_1)| < 1. \quad (2.67)$$

Sous ces hypothèses, la déformation  $\mathbf{F}(\cdot, t)$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $\overline{S_0}$  sur  $\overline{\mathbf{F}(S_0, t)}$ , pour tout  $t \geq 0$  (voir [6]). Par conséquent, l'hypothèse (H1) est satisfaite avec  $\mathbf{X}^* = \mathbf{F}$ . De plus, grâce à la symétrie de  $S_0$ , le modèle géométrique de poutre de Kirchhoff préserve l'aire totale du solide déformable c'est-à-dire que  $\mathbf{X}^* = \mathbf{F}$  vérifie également l'hypothèse (H2).

La déformation  $\mathbf{F}$  ne conserve pas le moment lineaire ni le moment angulaire du corps déformable, c'est-à-dire que les hypothèses (H3) et (H4) ne sont pas vérifiées pour  $\mathbf{X}^* = \mathbf{F}$ . Cependant, on peut combiner  $\mathbf{F}$  avec un déplacement rigide afin que ces hypothèses soient satisfaites. En effet, il existe deux fonctions régulières  $\theta_{\mathbf{F}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\xi_{\mathbf{F}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  telles que  $\mathbf{X}^*$  définie par

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t) = R_{\theta_{\mathbf{F}}(t)}(\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) - \xi_{\mathbf{F}}(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.68)$$

vérifie les hypothèses (H3) et (H4). Comme les hypothèses (H1) et (H2) sont invariantes sous l'action d'un mouvement rigide, la déformation  $\mathbf{X}^*$  vérifie donc toutes les hypothèses (H1)–(H4).

La fonction  $\xi_{\mathbf{F}}$  correspond à la position du centre de masse de  $\mathbf{F}(S_0, \cdot)$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$\xi_{\mathbf{F}}(t) = \frac{1}{m} \int_{\mathbf{F}(S_0, t)} \rho_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, t) \mathbf{z} d\mathbf{z} = \frac{1}{m} \int_{S_0} \rho_0(\mathbf{y}) \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}, \quad (2.69)$$

où  $\rho_{\mathbf{F}}$  désigne la densité de  $\mathbf{F}(S_0, \cdot)$  définie par

$$\rho_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{y})}{\det(\nabla \mathbf{F})(\mathbf{y}, t)} \quad \text{avec } \mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t), \mathbf{y} \in S_0, t \geq 0. \quad (2.70)$$

Dans la pratique, on n'utilise pas directement la correction par la fonction  $\theta_{\mathbf{F}}$ . En effet, la formulation variationnelle (2.26)–(2.29) est inchangée avec le déplacement du solide déformable

$$\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) = \xi(t) + R_{\theta(t)}(\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) - \xi_{\mathbf{F}}(t)), \quad \mathbf{y} \in S_0, t \geq 0,$$



à la place de (2.2), où  $\theta(t)$  est désormais l'angle d'orientation par rapport à  $\mathbf{F}(S_0, t)$  et non plus par rapport à  $S^*(t)$  (cf. Figure 2.1). La vitesse  $\mathbf{u}$  du fluide est étendue au solide déformable par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\xi}'(t) + \theta'(t)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^\top + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t), \quad t \geq 0. \quad (2.71)$$

La vitesse de déformation  $\mathbf{w}$  est donnée, pour tout  $\mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), \theta(t), t)$ ,  $t \geq 0$ , par

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = R_{\theta(t)}(\mathbf{w}_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, t) - \boldsymbol{\xi}'_{\mathbf{F}}(t)) \quad \text{avec } \mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in S_0 \quad (2.72)$$

et  $\mathbf{w}_{\mathbf{F}}$  est la vitesse de déformation associée à  $\mathbf{F}$  c'est-à-dire, pour  $t \geq 0$ ,

$$\mathbf{w}_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, t) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) \quad \text{avec } \mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in S_0. \quad (2.73)$$

**Exemple de paramétrisation  $\mathbf{f}$ .** La déformation  $\mathbf{F}$  est complètement déterminée dès lors qu'on se donne la paramétrisation  $\mathbf{f}$  de l'axe moyen du solide déformé. Le choix de  $\mathbf{f}$  à utiliser dans (2.63) est motivé par les observations zoologiques (voir [LV05] et aussi [Chi81], [Lig75]). Un choix possible consiste à prescrire directement la déformation  $\mathbf{f}$  de l'axe moyen du solide déformable. Ce choix correspond plutôt à une nage de type "anguille" (nage anguilliforme). Un autre choix possible consiste à prescrire la courbure de l'axe moyen  $\mathbf{f}$ . Cette situation correspond à une nage de type "truite" ou "saumon" (nage carangiforme). Dans ce cas, la courbure est donnée par

$$\kappa(y_1, t) = (a_2 y_1^2 + a_1 y_1 + a_0) \sin \left( 2\pi \left( \frac{y_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right) + a_3 \quad (y_1 \in [0, l]), \quad (2.74)$$

où  $a_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\lambda$ ,  $T$  sont des constantes données. L'axe moyen  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^\top$  du solide déformable est alors calculé en intégrant les formules de Frenet. A partir de (2.65), (2.66), on obtient, pour  $t \geq 0$ ,  $y_1 \in [0, L]$ ,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y_1^2}(y_1, t) = -\kappa(y_1, t) J \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1}(y_1, t) \quad \text{avec } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

En intégrant (2.75) par rapport à  $y_1$ , on obtient pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1}(y_1, t) = \exp(\alpha(y_1, t) J) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1}(0, t), \quad (2.76)$$

avec

$$\alpha(y_1, t) = - \int_0^{y_1} \kappa(s, t) ds. \quad (2.77)$$

On intègre à nouveau (2.76) par rapport à  $y_1$  et on utilise la relation  $\exp(\alpha J) = \cos(\alpha) I_d + \sin(\alpha) J$ .

Si on choisit  $\mathbf{f}(0, t) = (0, 0)^\top$ ,  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_1}(0, t) = (1, 0)^\top$  pour tout  $t \geq 0$ , on obtient alors

$$\mathbf{f}(y_1, t) = \left( \int_0^{y_1} \cos(\alpha(s, t)) ds, - \int_0^{y_1} \sin(\alpha(s, t)) ds \right)^\top, \quad y_1 \in [0, l]. \quad (2.78)$$

Si la condition

$$\frac{l^3 |a_2|}{3} + \frac{l^2 |a_1|}{2} + l(|a_0| + |a_3|) < \frac{\pi}{2}, \quad (2.79)$$

est satisfaite, alors  $\mathbf{f}$  définie par (2.78) est telle que  $\inf_{y_1 \in (0, l)} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_1, t) > 0$  et par conséquent la première condition de (2.67) est vérifiée. Par ailleurs, si on choisit  $\gamma$  tel que

$$\sup_{y_1 \in (0, l)} |\gamma(y_1)| < \frac{1}{l^2 |a_2| + l |a_1| + |a_0| + |a_3|}, \quad (2.80)$$

alors la seconde condition de (2.67) est aussi satisfaite. Par conséquent, sous les conditions (2.79) et (2.80), la déformation  $\mathbf{F}$  dans (2.63) est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

## 2.6 Résultats et simulations numériques

Dans la pratique, le relèvement  $\Pi\Lambda_h^k(\mathbf{x})$  de la vitesse de déformation  $\mathbf{w}$  est construit d'après la définition (2.47) i.e.  $\Pi\Lambda_h^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2N} w_i^k \Phi_i(\mathbf{x})$  en prenant  $w_i^k = \Lambda_h^k(P_i)$  si  $P_i$  est un point intérieur au corps déformable  $S(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)$  et  $w_i^k = 0$  sinon, c'est-à-dire si  $P_i$  est dans le fluide. La fonction  $\Lambda_h^k$  est définie par (2.34). Autrement dit, on a

$$w_i^k = \begin{cases} R_{\theta_h^k} \mathbf{w}^* \left( R_{-\theta_h^k} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_h^k), t_k \right) & \text{si } P_i \in S(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.81)$$

Donnons un premier exemple d'une simulation numérique de la nage d'un poisson en ligne droite. Dans la loi d'évolution de la courbure (2.74), on choisit les paramètres  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 2$  et  $a_3 = 0$ ,  $\lambda = 1$  et  $T = 1$ ,  $l = 0.3$ . La déformation est périodique en temps et la déformation est symétrique par rapport à la configuration initiale à  $t = 0$  (voir Figure 2.3). Le résultat de

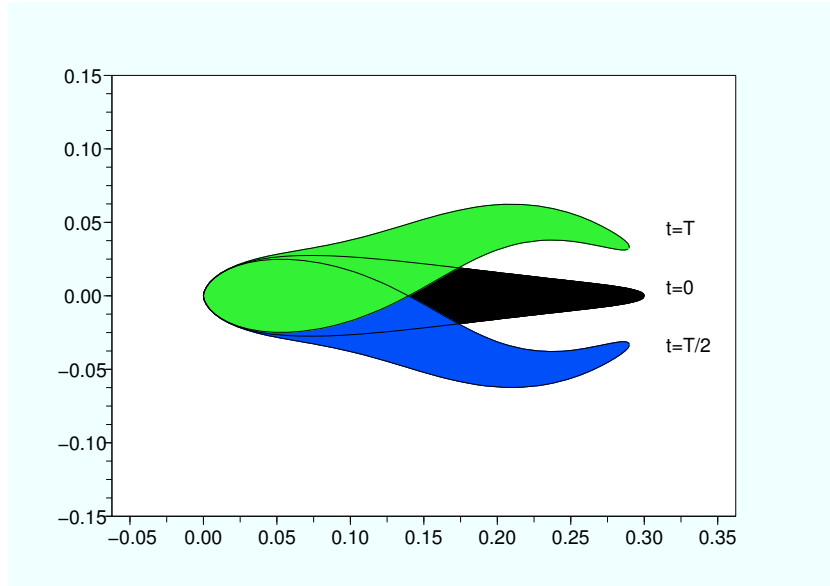


FIGURE 2.3 – Déformation symétrique d'un poisson 2D pour la nage en ligne droite.

l'interaction entre le fluide et la déformation du poisson est de propulser le poisson dans le fluide de façon rectiligne. Ce phénomène d'auto-propulsion est mis en évidence dans la Figure 2.4 où la position du poisson dans le fluide est reproduite à différents instants. Dans cet exemple, la vitesse initiale du poisson est nulle.

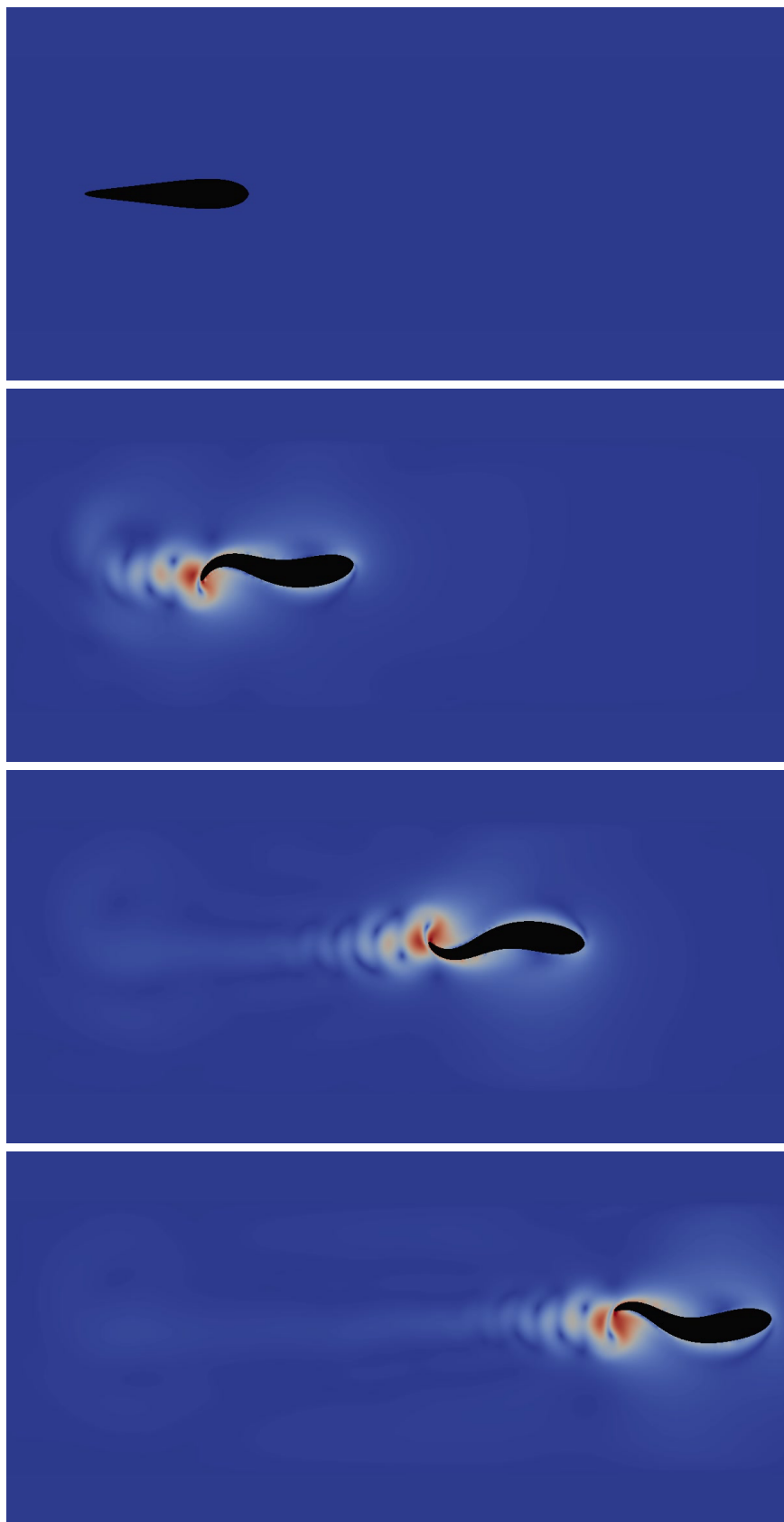


FIGURE 2.4 – Nage rectiligne d'un poisson 2D ; amplitude du champs de vitesse

Un second exemple numérique montre la possibilité de tourner en nageant. Dans cet exemple, on choisit les paramètres  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = -3$  et  $\lambda = 1$ ,  $T = 1$ ,  $l = 0.3$  dans la loi d'évolution (2.74) de la courbure. Dans ce cas, la déformation est périodique en temps et elle est symétrique par rapport à la configuration initiale dans laquelle l'axe moyen du corps déformable a une courbure constant égale à  $a_3$  (voir Figure 2.5).

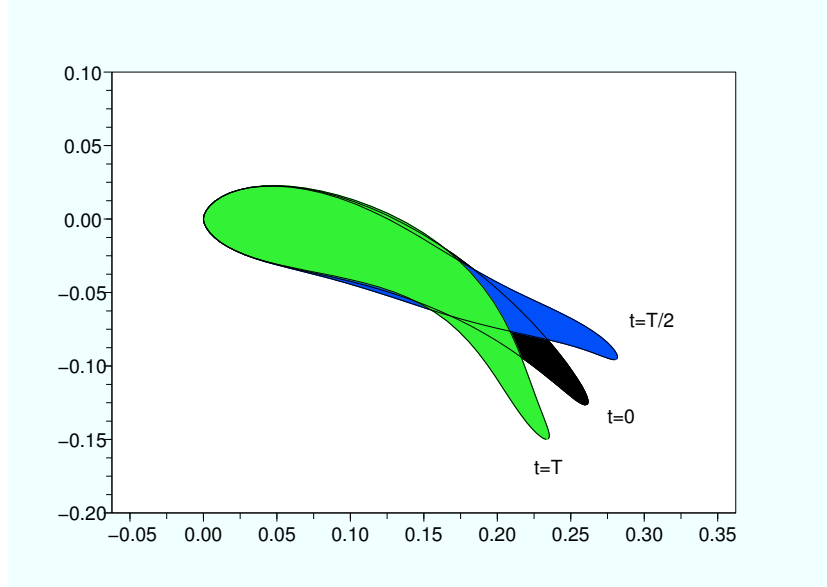


FIGURE 2.5 – Déformation d'un poisson 2D pour tourner en nageant.

Le résultat des simulations montre que le poisson est capable simultanément d'avancer et de tournant dans le fluide. Le centre de masse du poisson décrit une trajectoire incurvée (voir Figure 2.7).

Un des mécanismes importants dans la nage des poissons repose sur la génération de tourbillons dans le sillage du poisson lors de sa déformation. Ces tourbillons tournent dans un certain sens afin de produire une force de poussée capable alors de propulser le poisson (voir [Spa02], [Chi81], [Lig75]). Ces tourbillons tournent dans le sens contraire des tourbillons de Von Karman qui sont engendrés dans un écoulement présentant un obstacle rigide fixe. Les tourbillons de Von Karman produisent une force de trainée alors que les tourbillons d'un poisson produisent une force de poussée (voir Figure 2.6 reproduite à partir de [Mül03]).

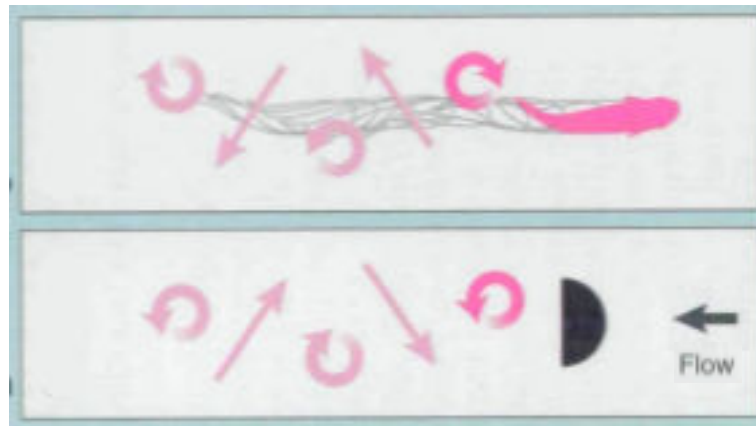


FIGURE 2.6 – Tourbillons d'un poisson vs. tourbillons de Von Karman (d'après [Mül03])

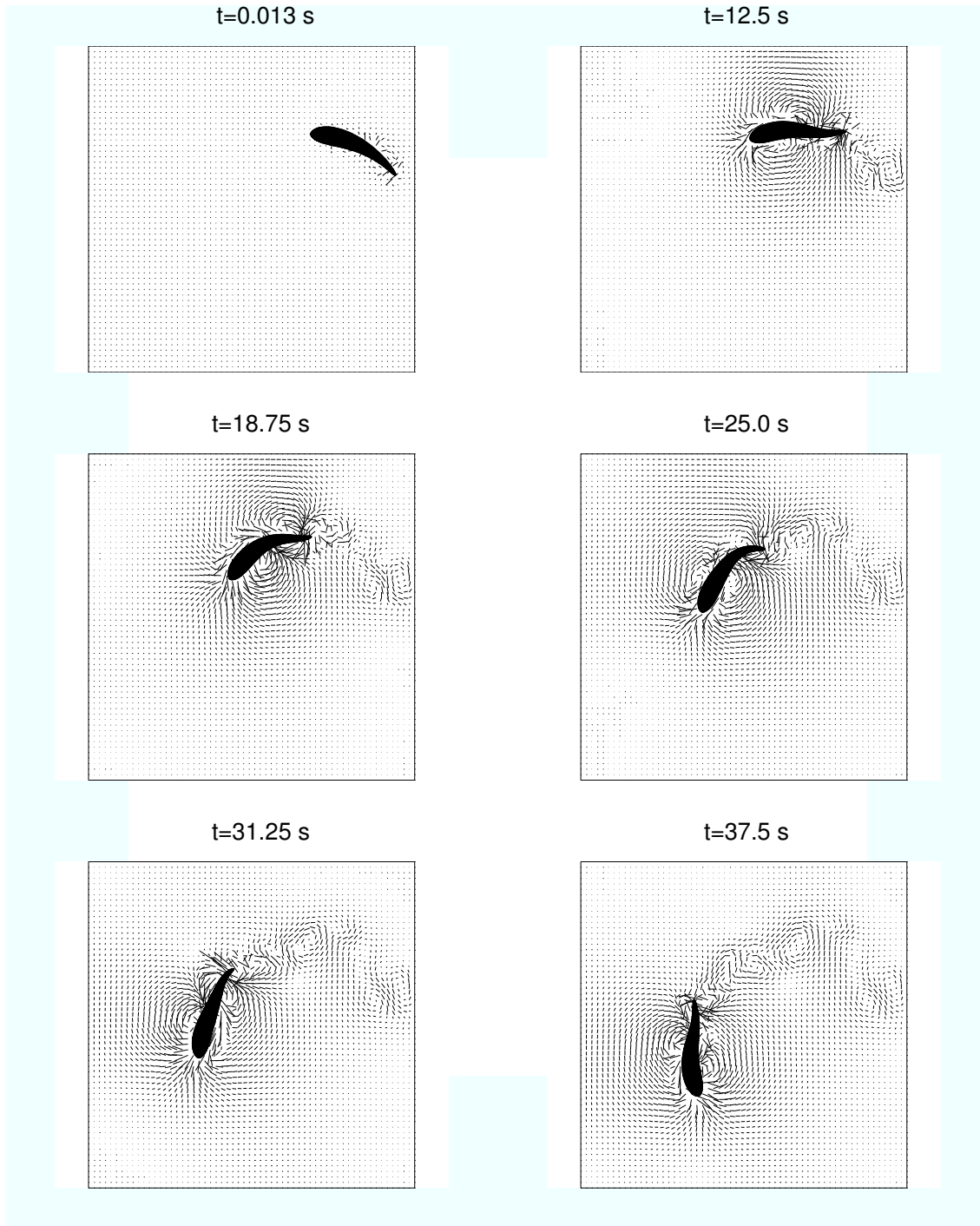


FIGURE 2.7 – Poisson 2D nageant et tournant dans le fluide ; champ de vitesse.

Les tourbillons engendrés par un poisson apparaissent pour certaines déformations dont le nombre de Strouhal est compris entre 0.4 et 0.6 (voir [TT95]). Le nombre de Strouhal  $St$  est défini par le rapport

$$St = \frac{f \cdot l}{U},$$

où  $f$  est la fréquence de génération des tourbillons et  $l$  est la largeur de l'allée des tourbillons engendrés dans le sillage du poisson et  $U$  l'amplitude maximale de la vitesse de déplacement du poisson.

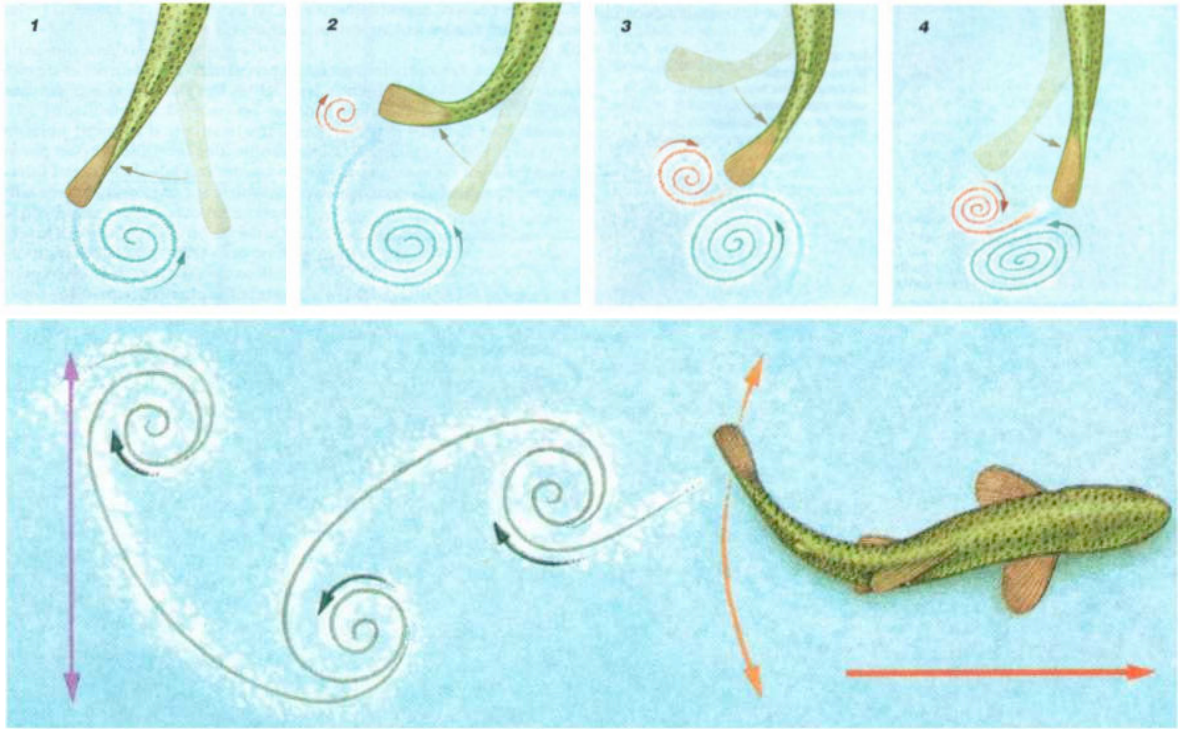


FIGURE 2.8 – Génération de tourbillons par un poisson (d'après [TT95]).

La Figure 2.8 reproduite d'après [TT95] montre les différentes étapes de la génération d'un tourbillon par un poisson. La Figure 2.9 est le résultat d'une simulation et montre bien les tourbillons obtenus de façon analogue à ce qui est attendu, en comparaison avec la Figure 2.9.

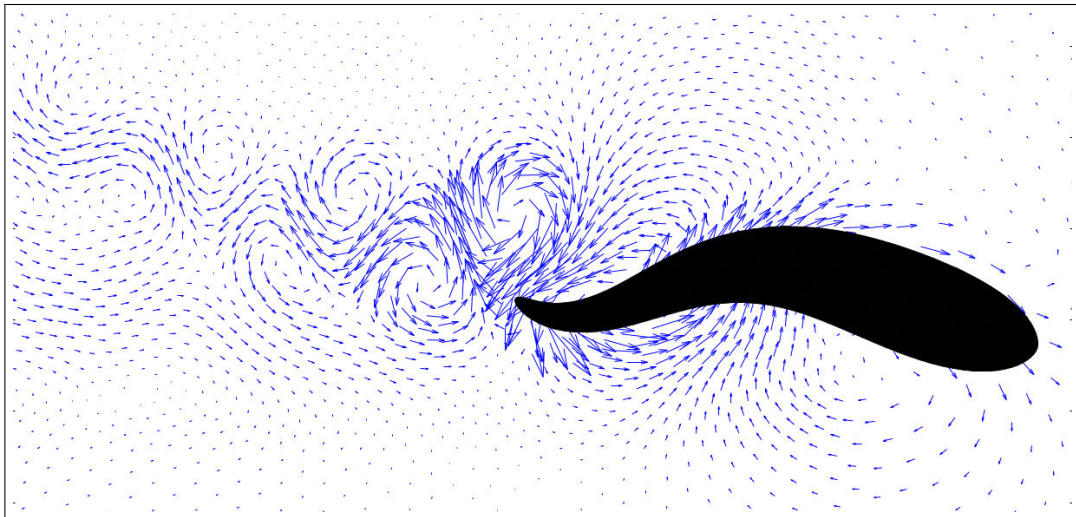


FIGURE 2.9 – Apparition des tourbillons dans la simulation de la nage d'un poisson.

Le dernier exemple montre l'influence de la viscosité du fluide (et donc du nombre de Reynolds) sur l'efficacité de la nage d'un poisson. On considère deux poissons de même forme de référence  $S_0$  auxquels on impose la même loi de déformation. En revanche, on choisit deux viscosités du fluide différentes. La Figure 2.10 montre les positions de chacun des poissons à trois instants différents. La viscosité du fluide de gauche est égale à  $\nu = 10^{-5}$  (nombre de Reynolds  $Re = 9556$ ) et le fluide de



droite a une viscosité  $\nu = 10^{-2}$  (nombre de Reynolds  $\text{Re} = 8$ ). On constate que la nage du poisson de gauche est plus efficace que celle du poisson de droite. L'efficacité (en terme de vitesse moyenne) est plus grande dans un fluide avec une viscosité plus faible (et donc un nombre de Reynolds plus grand). On discutera plus particulièrement de cette situation au chapitre suivant lorsqu'on s'intéressera à la nage à bas nombre de Reynolds (viscosité du fluide très grande).

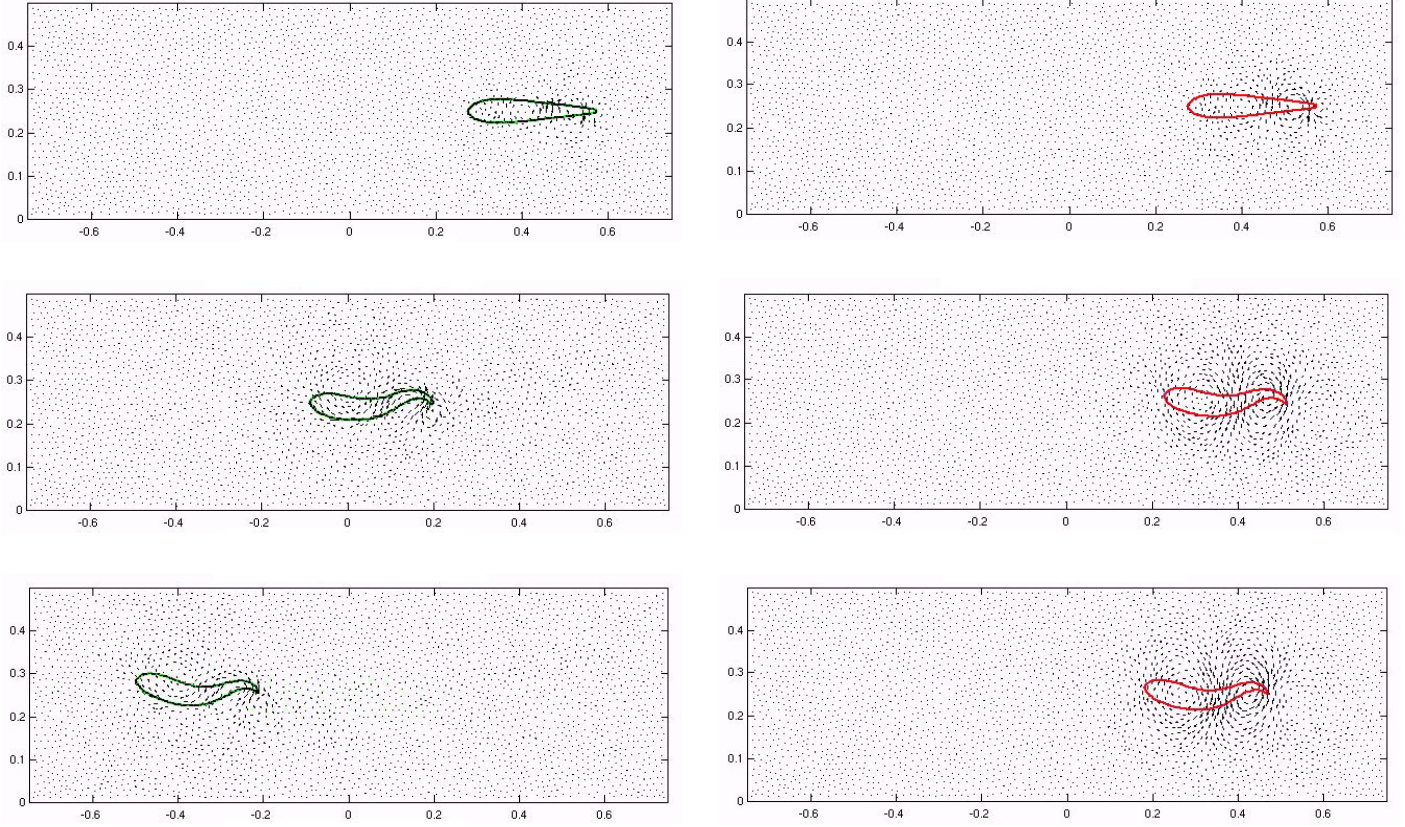


FIGURE 2.10 – Comparaison de l'efficacité de la nage d'un poisson en fonction de la viscosité  $\nu$  du fluide ; à gauche  $\nu = 10^{-5}$ , à droite  $\nu = 10^{-2}$ .

## 2.7 Extension à la dimension 3 d'espace

Dans cette section on considère le système d'interaction fluide-solide déformable en dimension 3 d'espace. On indiquera essentiellement les modifications apportées au cas de la dimension 2 d'espace, à la fois dans la modélisation (couplage fluide-solide déformable et déformation du solide) et dans les méthodes numériques de résolution. On donnera enfin quelques résultats de simulations numériques pour la nage (3D) de poisson.

### 2.7.1 Modélisation

En dimension 3 d'espace, le solide déformable occupe une configuration de référence  $S_0$  qui est un ouvert connexe régulier de  $\mathbb{R}^3$ . La déformation du solide est donnée par l'application régulière  $\mathbf{X}^* : S_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  et comme pour le cas 2D, on note  $S^*(t) = \mathbf{X}^*(S_0, t)$ ,  $t \geq 0$ . On suppose que la déformation  $\mathbf{X}^*$  satisfait les hypothèses de régularité et les conditions d'auto-propulsion (H1)–(H4).

En dimension 3 d'espace, la position du solide à l'instant  $t$  est déterminée par la position de son centre de masse  $\boldsymbol{\xi}(t)$  et une matrice de rotation  $R(t) \in SO(3)$  avec  $R(0) = I_d$ . Le déplacement du

solide déformable est déterminé par l'application régulière  $\mathbf{X} : S_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que

$$\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\xi}(t) + R(t)\mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t), \quad \forall \mathbf{y} \in S_0, t \geq 0. \quad (2.82)$$

La matrice  $R \in SO(3)$  est reliée au vecteur des vitesses angulaires  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  par la relation

$$R'(t) = A(\boldsymbol{\omega})R(t) \text{ avec } A(\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

La matrice de rotation  $R$  est uniquement déterminée à partir du vecteur des vitesses angulaires  $\boldsymbol{\omega}$ , en résolvant (2.83) avec la condition initiale  $R(0) = I_d$ .

Le domaine occupé par le solide déformable à l'instant  $t$  est donné par

$$S(t) = S(\boldsymbol{\xi}(t), R(t), t) = \boldsymbol{\xi}(t) + R(t)S^*(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.84)$$

La vitesse eulérienne  $\mathbf{u}_S$  du solide est égale à

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\xi}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), R(t), t), t \geq 0, \quad (2.85)$$

où

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = R(t)\mathbf{w}^*\left(R^\top(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)), t\right), \quad \forall \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), R(t), t), t \geq 0 \quad (2.86)$$

et  $\mathbf{w}^*$  est la vitesse de déformation associée à  $\mathbf{X}^*$  définie par (2.4). La densité eulérienne du solide déformable est donnée par

$$\rho_S(\mathbf{x}, t) = \rho_S^*(R(t)^\top(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)), t), \quad \forall t \geq 0, \mathbf{x} \in S(\boldsymbol{\xi}(t), R(t), t), \quad (2.87)$$

où  $\rho_S^*$  est définie par (2.6).

En dimension 3 d'espace, le système fluide-solide déformable occupe un domaine borné  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$  de bord régulier  $\partial\mathcal{O}$  et le fluide remplit le domaine  $F(t) = F(\boldsymbol{\xi}(t), R(t), t) = \mathcal{O} \setminus \overline{S(\boldsymbol{\xi}(t), R(t), t)}$ . Les inconnues du système complet fluide-solide déformable sont la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  du fluide ainsi que la position  $\boldsymbol{\xi}$  et le vecteur des vitesses angulaires  $\boldsymbol{\omega}$  du solide déformable. Le système fluide-solide déformable s'écrit, pour  $t \in [0, T]$ ,

$$\rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho_f \mathbf{f} \quad \text{dans } F(t), \quad (2.88)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } F(t), \quad (2.89)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, \quad (2.90)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \partial S(t), \quad (2.91)$$

$$m\boldsymbol{\xi}''(t) = - \int_{\partial S(t)} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\Gamma + \int_{S(t)} \rho_s(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (2.92)$$

$$(J\boldsymbol{\omega})'(t) = - \int_{\partial S(t)} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \times \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\Gamma + \int_{S(t)} \rho_s(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (2.93)$$

Les conditions initiales du système (2.88)-(2.93) sont données par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in F(0), \quad (2.94)$$

$$\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\xi}'(0) = \boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \in \mathbb{R}^3. \quad (2.95)$$



L'inertie  $J$  du solide déformable par rapport à son centre de masse est une matrice  $3 \times 3$  et elle vaut

$$J(t) = \int_{S(t)} \rho_S(t) (|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)|^2 \mathbf{I}_3 - (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \otimes (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))) d\mathbf{x} \quad (2.96)$$

Toute solution  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega})$  du système (2.88)–(2.95) vérifie une formulation variationnelle globale identique à (2.28), (2.29). De la même façon qu'en dimension 2 d'espace, on construit un relèvement  $\Lambda$  à tout le domaine  $\mathcal{O}$  de la vitesse  $\mathbf{w}$  comme à la Section 2.2, en prenant soin de remplacer formellement la matrice  $R_{\theta(t)}$  par la matrice  $R(t) \in SO(3)$  et de remplacer  $R_{-\theta(t)}$  par  $R(t)^\top$ .

### 2.7.2 Modèle de déformation

On suppose que le corps de référence  $S_0 \subset \mathbb{R}^3$  est un ensemble connexe régulier défini par

$$S_0 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 \in [0, L], (y_2, y_3) \in D(y_1)\}, \quad (2.97)$$

où, pour tout  $y_1 \in [0, L]$ ,  $D(y_1)$  est un ensemble fermé connexe de  $\mathbb{R}^2$  dont le barycentre est localisé en  $(y_1, 0, 0)^\top$ . On suppose également que le segment de droite

$$\mathcal{C}_0 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 \in [0, L], y_2 = 0, y_3 = 0\}, \quad (2.98)$$

est à l'intérieur de  $S_0$ . La déformation du corps de référence  $S_0$  est obtenue en déformant l'axe moyen  $\mathcal{C}_0$  en une courbe  $\mathcal{C}(t)$  ( $t > 0$ ) et en maintenant les sections de  $S_0$  perpendiculaires à l'axe moyen lors des déformations.

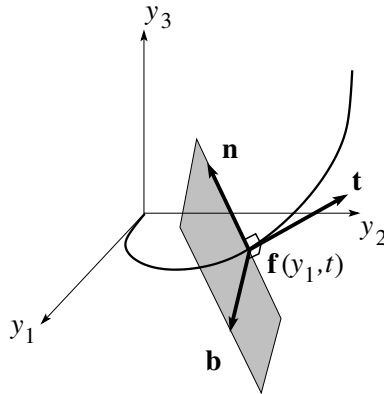


FIGURE 2.11 – Modèle géométrique de déformation 3D

On note  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(y_1, t) = (f_1(y_1, t), f_2(y_1, t), f_3(y_1, t))^\top$  la paramétrisation de la déformation de l'axe moyen  $\mathcal{C}(t)$  par son abscisse curviligne  $y_1$ , à l'instant  $t \geq 0$  (on a  $|\partial \mathbf{f} / \partial y_1(\cdot, t)| \equiv 1$  pour tout  $t \geq 0$ ). On introduit le trièdre de Frenet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  de  $\mathcal{C}(t)$  au point  $\mathbf{f}(y_1, t)$  avec  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(y_1, t) = \partial \mathbf{f} / \partial y_1(y_1, t)$  le vecteur unitaire tangent à la courbe  $\mathcal{C}(t)$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(y_1, t)$  le vecteur unitaire normal et  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(y_1, t)$  le vecteur unitaire binormal avec  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$  (voir Figure 2.11). Pour  $t \geq 0$ , la déformation  $\mathbf{F}(\cdot, t) : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est définie par

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{f}(y_1, t) + y_2 \mathbf{n}(y_1, t) + y_3 \mathbf{b}(y_1, t) \quad (2.99)$$

pour  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in S_0$ .

**Formules de Frenet.** Les vecteurs du trièdre de Frenet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  vérifient les relations suivantes (on omet la dépendance par rapport au temps  $t$ ) :

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 & \kappa \mathbf{l}_3 & 0_3 \\ -\kappa \mathbf{l}_3 & 0_3 & \tau \mathbf{l}_3 \\ 0_3 & \tau \mathbf{l}_3 & 0_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad (2.100)$$

où  $\kappa$  est la *courbure* et  $\tau$  est la *torsion*. En  $y_1 = 0$ , on choisit  $(\mathbf{t}(0, t), \mathbf{n}(0, t), \mathbf{b}(0, t))^\top = (e_1, e_2, e_3)^\top$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Jacobien de  $\mathbf{F}(\cdot, t)$ .** Le jacobien de la transformation (2.99) vaut

$$\text{Jac } \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \det(\nabla \mathbf{F})(\mathbf{y}, t) = 1 - y_2 \kappa(y_1, t), \quad (2.101)$$

pour tout  $(\mathbf{y}, t) \in S_0 \times \mathbb{R}^+$ .

**Conservation du volume.** Pour  $t \geq 0$ , on a  $|\mathbf{F}(S_0, t)| = |S_0|$ , c'est-à-dire que la volume du solide déformé est conservé durant la déformation. Ceci se vérifie facilement grâce à l'hypothèse que, pour tout  $y_1 \in [0, L]$ , le barycentre de  $D(y_1)$  est  $(0, 0)^\top$ .

**Densité et conservation de la masse.** Afin d'assurer la conservation de la masse au cours de la déformation, on choisit la densité du corps déformé  $\mathbf{F}(S_0, t)$  donné par

$$\rho_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{y})}{\text{Jac } \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)} = \frac{\rho_0(\mathbf{y})}{1 - y_2 \kappa(y_1, t)} \quad \text{avec } \mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t), \quad (2.102)$$

où  $\rho_0$  est la densité du corps de référence  $S_0$ . Ceci entraîne la conservation de la masse du corps déformé  $\mathbf{F}(S_0, t)$  à chaque instant  $t \geq 0$ .

**Régularité de la déformation  $\mathbf{F}$ .** Si la courbure et la torsion ne sont pas trop grandes, alors on peut montrer que la déformation  $\mathbf{F}$  est bien un difféomorphisme.

**Lemme 1** Soit  $D^* = \sup_{y_1 \in [0, L]} \text{diam}(D(y_1)) > 0$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on suppose que

$$\left( \sup_{[0, L]} |\kappa(\cdot, t)| \right) \frac{L}{2} + D^* \sup_{[0, L]} (2|\kappa(\cdot, t)| + |\tau(\cdot, t)|) < 1. \quad (2.103)$$

Alors pour tout  $t \geq 0$ , la déformation  $\mathbf{F}(\cdot, t)$  est un difféomorphisme de  $\overline{S_0}$  sur  $\overline{\mathbf{F}(S_0, t)}$ .

La déformation  $\mathbf{F}$  ne satisfait pas les hypothèses requises d'auto-propulsion (H3)–(H4). Cependant, en procédant comme à la Section 2.5 pour la déformation en dimension 2 d'espace, on peut construire à partir de  $\mathbf{F}$  une déformation  $\mathbf{X}^*$  qui vérifie bien les hypothèses (H3)–(H4).

**Exemple de déformation de l'axe moyen.** L'axe moyen  $\mathcal{C}$  est déformé en prescrivant la courbure  $\kappa$  et la torsion  $\tau$ . On choisit

$$\begin{aligned} \kappa(y_1, t) &= p_1(y_1) \sin(2\pi(y_1/\lambda - t/T)) \\ \tau(y_1, t) &= p_2(y_1) \sin(2\pi(y_1/\lambda - t/T)) \end{aligned} \quad (2.104)$$

où  $p_1, p_2, p_3$  sont des polynômes de degré 2 (ou plus) en  $y_1$ . Les paramètres  $\lambda > 0$  et  $T > 0$  (période) sont donnés. A chaque instant  $t \geq 0$ , le trièdre de Frenet  $(\mathbf{t}(\cdot, t), \mathbf{n}(\cdot, t), \mathbf{b}(\cdot, t))$  est déterminé en résolvant les formules de Frenet (2.100) avec la condition de bord en  $y_1 = 0$ ,  $(\mathbf{t}(0, t), \mathbf{n}(0, t), \mathbf{b}(0, t))^\top = (e_1, e_2, e_3)^\top$ . On obtient (en oubliant la dépendance par rapport au temps  $t$ ) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}(y_1) \\ \mathbf{n}(y_1) \\ \mathbf{b}(y_1) \end{pmatrix} = \exp(\mathcal{M}(y_1)) \begin{pmatrix} \mathbf{t}(0) \\ \mathbf{n}(0) \\ \mathbf{b}(0) \end{pmatrix} \quad (y_1 \in [0, L]) \quad (2.105)$$

où

$$\mathcal{M}(y_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \alpha(y_1)\mathbf{l}_3 & \mathbf{0}_3 \\ -\alpha(y_1)\mathbf{l}_3 & \mathbf{0}_3 & \beta(y_1)\mathbf{l}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \beta(y_1)\mathbf{l}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

avec  $\alpha(y_1) = \int_0^{y_1} \kappa(r) dr$ ,  $\beta(y_1) = \int_0^{y_1} \tau(r) dr$ . Une fois le trièdre  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  déterminé, on intègre la relation  $\mathbf{t} = \partial \mathbf{f} / \partial y_1$  pour déterminer la paramétrisation  $\mathbf{f}$  de l'axe moyen  $\mathcal{C}$  :

$$\mathbf{f}(y_1, t) = \int_0^{y_1} \mathbf{t}(s, t) ds + \mathbf{f}(0, t), \quad (t \geq 0). \quad (2.107)$$

La valeur initiale  $\mathbf{f}(0, t)$  est fixée pour tout  $t \geq 0$ .

### 2.7.3 Résultats numériques

Le schéma numérique utilisé pour résoudre le système (2.88)-(2.93) est basé sur la formulation variationnelle globale et il est une extension directe du schéma présenté en dimension 2 d'espace aux Sections 2.3 et 2.4. Un code de calculs a été écrit avec des Eléments Finis  $\mathbb{Q}_2$ - $\mathbb{Q}_1$ . Ce code appelé **SUSHI3D** (**SimUlations of Structures in Hydrodynamic Interactions**) est écrit en **MATLAB** avec un interfaçage de fonctions  $C/C^{++}$  pour gérer notamment les opérations sur les matrices creuses (multiplication matrice/vecteur, ajout ou suppression d'éléments, ...). Le code **SUSHI3D** est diffusé sous licence GNU GPL et disponible à l'adresse <http://sushi3d.iecn.u-nancy.fr>.

Dans cette section, on présente quelques résultats de simulations obtenus avec le code **SUSHI3D** pour la nage de poisson en dimension 3 d'espace et en utilisant la déformation  $\mathbf{F}$  décrite à la section précédente.

Dans le premier exemple, on prend  $p_1(y_1) = (a_3 y_1^3 + a_2 y_1^2 + a_1 y_1 + a_0)$  dans l'expression (2.104) de la courbure  $\kappa$ , avec  $a_0 = 0.25$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 1$  et  $\lambda = 1$ ,  $T = 1$ . Aucune torsion n'est imposée ( $\tau \equiv 0$ ). La Figure 2.12 montre la position du poisson dans le fluide à différents instants. Les particules vertes initialement positionnées dans un plan horizontal se déplacent sous l'action du champ de vitesse dans le fluide (suivi de particules).

Le deuxième exemple illustré par la figure 2.13, montre deux poissons nageant de façon synchronisée. La loi de déformation est la même pour les deux poissons et elle est donnée comme au premier exemple.

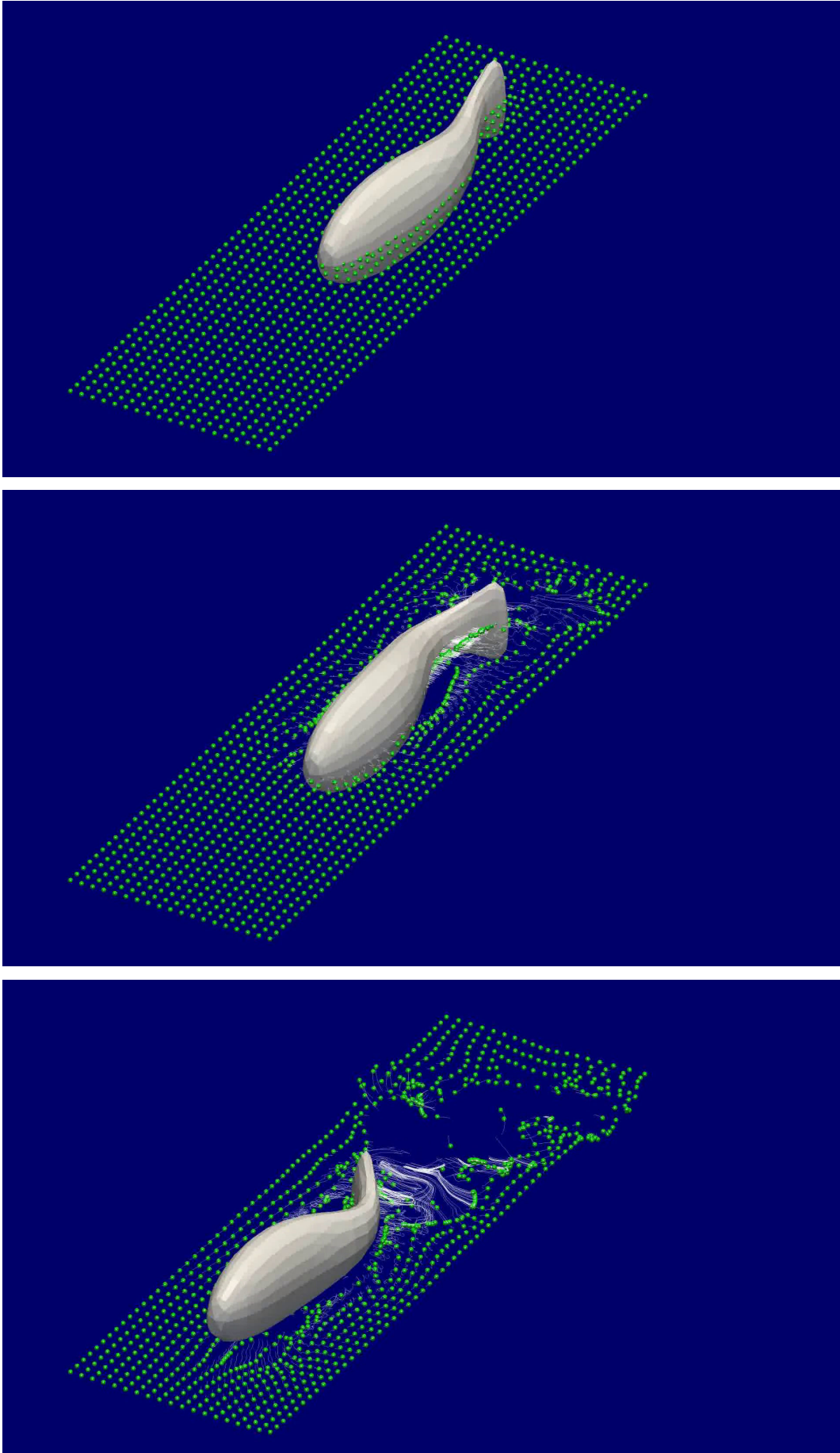


FIGURE 2.12 – Nage d'un poisson 3D.

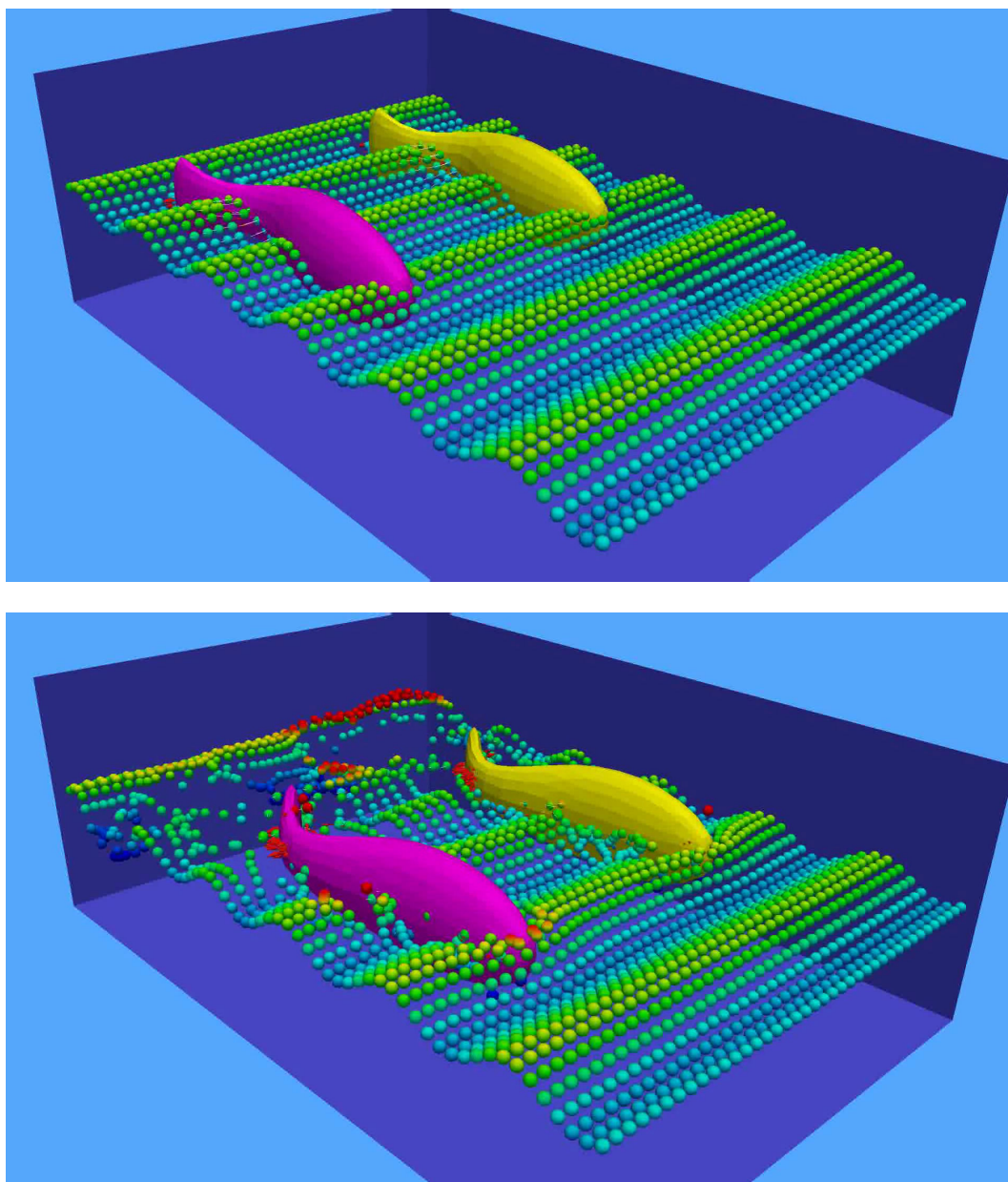


FIGURE 2.13 – Nage synchronisée de deux poissons 3D.

## Chapitre 3

# Contrôle optimal pour l'autopropulsion à bas nombre de Reynolds

### 3.1 Introduction et modélisation

Les mécanismes de propulsion de certains micro-organismes aquatiques sont essentiellement basés sur les forces de friction, les forces d'inertie ne jouant aucun rôle. Ces forces d'inertie sont importantes si on s'intéresse au mécanisme de la nage pour des objets macroscopiques comme les poissons, en revanche pour la nage des micro-organismes on néglige ces forces d'inertie en considérant un fluide à très faible nombre de Reynolds. Parmi les premières contributions à l'étude de ces phénomènes à bas nombre de Reynolds, on peut citer les travaux fondateurs de Taylor [Tay51], Lighthill [Lig75, Lig52] et Childress [Chi81]. Les problèmes d'auto-propulsion à bas Reynolds ont aussi été abordés du point de vue de l'optimisation et de la théorie du contrôle. Dans le travail pionnier de Pironneau-Katz [PK74] sur l'auto-propulsion de micro-organismes flagellés, les auteurs établissent que les déformations optimales minimisant l'énergie de viscosité instantanée sont données par une onde progressive (voir aussi [Pir73] et [Pir74] où une méthode de gradient par changement de forme est développée pour déterminer la forme optimale qui minimise la trainée dans un fluide de Stokes). Ces techniques d'optimisation et de contrôle ont données lieu à des développements plus récemment, parmi lesquels on peut citer les travaux de Shapere-Wilczek [SW89], San Martin-Takahashi-Tucsna [SMTT07], Alouges-DeSimone-Lefebvre [ADH11], Alouges-DeSimone-Heltai [ADL08] et Lauga-Michelin [ML10].

Dans ce chapitre, je présente les travaux effectués en collaboration avec M. Tucsna et J. Lohéac dont le sujet a constitué une partie de sa thèse. Ces travaux portent sur l'analyse et le contrôle d'un système d'interaction fluide-structure modélisant l'auto-propulsion d'une sphère à bas nombre de Reynolds par déformation de forme. On impose à la sphère des déformations axisymétriques et radiales. Les résultats présentés dans ce chapitre sont publiés dans [3] et [2]. Ces résultats sont de deux types :

1. Contrôlabilité : étant données des positions initiale et finale dans le fluide, on montre l'existence de déformations amenant le centre de masse de l'objet de la position de départ à la position d'arrivée. Au début et à la fin de la nage, l'objet est une sphère.
2. Contrôle en temps minimal : parmi les déformations amenant le centre de masse de l'objet de la position de départ à la position d'arrivée, on détermine celles qui réalisent cette tâche en un temps minimal.

L'approche basée sur la théorie du contrôle pour étudier la nage à bas Reynolds a été utilisée dans [SMTT07] où l'objet est une sphère non déformable et le contrôle est la vitesse tangentielle sur le bord de la sphère. Dans [ADH11], les auteurs étudient un problème de contrôle pour un nageur constitué de 3 sphères. Dans la littérature, les problèmes de contrôle optimal pour la nage à bas

Reynolds sont généralement basées sur une fonction coût d'*efficacité* et non sur le temps minimal (voir par exemple, [SW89, ADL08, ML10]).

On reprend les notations introduites à la Section 2.7 du Chapitre 2 dans le cas de la dimension 3 d'espace. La sphère unité dans  $\mathbb{R}^3$  est notée  $S_0$  et  $S(t)$  désigne le domaine occupé par la sphère déformée à l'instant  $t$ . Le mouvement de la sphère déformée se décompose en un déplacement rigide qui est **inconnu** et une déformation qui ne modifie pas le centre de masse ni l'orientation globale de la sphère déformée. Plus précisément, pour  $t \geq 0$ , on a  $S(t) = \mathbf{X}(S_0, t)$  avec  $\mathbf{X} : S_0 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\xi}(t) + R(t)\mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t)$  pour tout  $\mathbf{y} \in S_0$ ,  $t \geq 0$ . La matrice de rotation  $R$  est reliée au vecteur des vitesses angulaires  $\boldsymbol{\omega}$  par la relation (2.83) et  $\boldsymbol{\xi}(t)$  est la position du centre de masse de la sphère déformée à l'instant  $t$ . Enfin, on rappelle que  $\mathbf{X}^*$  désigne la déformation appliquée à la sphère  $S_0$ . La nage étant généralement une action périodique en temps, on impose à la déformation  $\mathbf{X}^*$  de vérifier

$$\mathbf{X}^*(\cdot, t) = \mathbf{X}^*(\cdot, t + T) \quad (t \geq 0), \quad (3.1)$$

avec  $T > 0$ .

Le domaine fluide est donné par  $\Omega(t) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{S(t)}$  et l'écoulement dans le fluide est régi par les équations de Stokes. On note  $\mathbf{u}(\cdot, t) : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$  la vitesse et  $p(\cdot, t) : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$  la pression dans le fluide. Le système d'interaction considéré s'écrit alors, pour tout  $t \geq 0$  :

$$-\nu \Delta \mathbf{u}(\cdot, t) + \nabla p(\cdot, t) = 0 \text{ dans } \Omega(t), \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\cdot, t) = 0 \text{ dans } \Omega(t), \quad (3.3)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = \mathbf{u}_S(\cdot, t) \text{ sur } \partial S(t), \quad (3.5)$$

$$\int_{\partial S(t)} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\Gamma = 0, \quad (3.6)$$

$$\int_{\partial S(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{h}) \times \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\Gamma = 0, \quad (3.7)$$

où  $\nu > 0$  est la viscosité du fluide et  $\mathbf{u}_S$  est la vitesse de la sphère déformée définie par (cf. (2.85))  $\mathbf{u}_S(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\xi}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ , pour tout  $\mathbf{x} \in S(t)$ ,  $t \geq 0$ . La vitesse  $\mathbf{w}$  est reliée à la vitesse de déformation  $\mathbf{w}^*$  associée à  $\mathbf{X}^*$  par les relations (2.86) et (2.4).

Les relations (3.6), (3.7) traduisent le fait qu'à chaque instant, la sphère déformée est en équilibre hydrodynamique sous l'action des forces exercées par le fluide. On verra à la section suivante que le système (3.2)–(3.7) d'inconnues  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\xi}, R)$  se réduit à un système d'ODE pour  $\boldsymbol{\xi}$  et  $R$ .

Dans un contexte de contrôle du déplacement de la sphère, le résultat de contrôlabilité établi dans [3] indique que pour tout  $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1 \in \mathbb{R}^3$ , il existe un temps  $T > 0$  et une déformation  $\mathbf{X}^*$  périodique tels que le centre de masse de la sphère positionné en  $\mathbf{h}_0$  à l'instant initial  $t = 0$ , atteint la position  $\mathbf{h}_1$  à l'instant  $T$ . Dans ce résultat, on impose à la déformation d'être axisymétrique et radiale, ce qui implique que la trajectoire du centre de masse est une ligne droite. Lohéac et Munnier [LM14] ont étendu ce résultat de contrôlabilité à des déformations plus générales.

Le deuxième type de résultats obtenus dans [3] et [2] concerne les solutions optimales associées à un problème de contrôle en temps minimal pour un problème linéarisé lié à (3.2)–(3.7). Des solutions optimales explicites sont obtenus dans [3] par application du principe du maximum de Pontryagin, sans imposer de contrainte de borne sur l'état. Imposer une contrainte sur l'état revient à limiter les amplitudes des déformations. Cette situation est particulièrement intéressante pour considérer des petites déformations de la sphère. Dans [2], des solutions explicites sont obtenues pour un système nonholonomique qui est une généralisation du système de Brockett (appelé aussi parfois système



d'Heisenberg) (voir [Blo03], [Bro82]) avec une contrainte de borne sur l'état. En particulier, des solutions optimales sont explicitement obtenues pour un problème linéarisé lié à (3.2)–(3.7) avec une contrainte sur l'amplitude des déformations.

## 3.2 Déformations radiales et contrôlabilité

Les déformations  $\mathbf{X}^*$  sont axisymétriques, radiales et périodiques en temps. On choisit les déformations de la forme

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{y}, t) = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^L \alpha_i(t) \mathbf{D}_i(\mathbf{y}), \quad \text{pour } \mathbf{y} \in S_0, \ t \geq 0, \quad (3.8)$$

avec

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{y}) = P_{i+1}(\cos \theta(\mathbf{y})) \mathbf{y}, \quad \text{pour } \mathbf{y} \in S_0, \quad (3.9)$$

où les  $(P_i)$  pour  $i \geq 2$ , sont les polynômes de Legendre et  $\theta(\mathbf{y}) \in [0, \pi]$  désigne l'angle du point  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . Les polynômes de Legendre forment une base orthogonale de  $L^2(-1, 1)$  et le choix de la forme (3.8) est motivé par le fait que la solution des équations de Stokes à l'extérieur de la sphère  $S_0 \subset \mathbb{R}^3$  se décompose en série selon les polynômes  $P_{i+1}(\cos(\theta))$  (voir [SW89] ou [HB65]). Cette propriété est importante pour établir le résultat de contrôlabilité présenté plus loin. La sphère déformée est donnée par

$$S^*(\boldsymbol{\alpha}) = \left( \mathbf{I}_d + \sum_{i=1}^L \alpha_i \mathbf{D}_i \right) (S_0) \quad (3.10)$$

où  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_L)^\top$  représentent les modes de déformations selon les polynômes de Legendre.

Puisque la déformation  $\mathbf{X}^*$  est axisymétrique et radiale, on peut imposer, sans perte de généralité, que le déplacement du centre de masse de la sphère déformée soit vertical et sans rotation. On cherche donc

$$\boldsymbol{\xi}(t) = h(t) \mathbf{e}_z, \quad (3.11)$$

où  $h(t)$  représente désormais la position verticale du centre de masse. Afin de réduire le système (3.2)–(3.7) à un système d'ODE pour  $h$  et  $\boldsymbol{\alpha}$ , on introduit la force verticale  $\mathbb{F}(S^*, \mathbf{v}_0)$  exercée par le fluide sur  $S^*$  et due à la vitesse  $\mathbf{v}_0$  sur le bord de  $S^*$  :

$$\mathbb{F}(S^*, \mathbf{v}_0) = \int_{\partial S^*} \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{v}_0), p(\mathbf{v}_0)) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma, \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de  $S^*$  et  $(\mathbf{u}(\mathbf{v}_0), p(\mathbf{v}_0))$  est la solution du problème extérieur de Stokes dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{S^*}$  avec la condition limite  $\mathbf{u}(\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0$  sur le bord  $\partial S^*$ . Dans ces conditions, le système (3.2)–(3.7) se réduit au système d'ODE suivant pour  $h$  et  $\boldsymbol{\alpha}$  :

$$\dot{h} = \langle \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta} \rangle \quad (3.13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta} \quad (3.14)$$

$$h(0) = 0, \ \boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

où  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = (f_i(\boldsymbol{\alpha}))_{1 \leq i \leq L}$  avec

$$f_i(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{\mathbb{F}(S^*(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{D}_i)}{\mathbb{F}(S^*(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{e}_z)}. \quad (3.16)$$

Si les modes de déformations sont suffisamment petits i.e. si, pour tout  $t \geq 0$ , on a  $|\boldsymbol{\alpha}(t)|_2 \leq c$  avec  $c$  suffisamment petit, alors on montre que la déformation  $\mathbf{X}^*(\cdot, t)$  définie par (3.8) est un difféomorphisme de  $S_0$  sur  $X^*(S_0, t)$ , pour tout  $t \geq 0$  et que par ailleurs  $\mathbb{F}(S^*(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{e}_z) \neq 0$  (voir [3]).



En définissant la densité  $\rho^*$  de la sphère déformée  $S^*$  par (2.6), la masse de la sphère déformée est conservée durant la déformation et les conditions d'autopropulsion sont vérifiées. En d'autres termes les conditions (H1)–(H4) de la Section 2.1 du Chapitre 2 *sont toujours vérifiées*. Dans le cas de la nage à bas Reynolds, les conditions d'autopropulsion ne jouent donc aucun rôle. En particulier, on montre le résultat suivant dans [3] : soient deux déformations  $\mathbf{X}_1^*$  et  $\mathbf{X}_2^*$  axisymétriques et radiales vérifiant  $\mathbf{X}_1^*(\cdot, 0) = \mathbf{X}_2^*(\cdot, 0) = \mathbf{X}_1^*(\cdot, T) = \mathbf{X}_2^*(\cdot, T) = \mathbf{I}_d$  et telles que  $\mathbf{X}_1^*(\cdot, t) = \mathbf{X}_2^*(\cdot, t) + h_c(t)\mathbf{e}_z$ , pour  $t \in [0, T]$  et avec une fonction  $h_c$  continue sur  $[0, T]$ . Si on désigne par  $h_1$  et  $h_2$  les solutions de (3.13)–(3.15) respectivement avec  $\mathbf{X}_1^*$  et  $\mathbf{X}_2^*$ , alors  $h_1(T) = h_2(T)$ . Autrement dit, les trajectoires du centre de masse associées aux deux déformations ne coïncident pas forcément mais la sphère se retrouve au même endroit en  $t = T$  qu'on applique indifféremment la déformation  $\mathbf{X}_1^*$  ou  $\mathbf{X}_2^*$ .

Dans le système (3.13)–(3.15), la fonction  $\beta$  est considérée comme étant le contrôle. Donnons à présent le résultat de contrôlabilité obtenu dans [3] et qui tient compte de contraintes à la fois sur le contrôle  $\beta$  et sur l'état  $\alpha$ .

**Théorème 3.2.1** *Pour tout  $L \geq 2$  et  $h_1 \in \mathbb{R}$ , il existe un temps  $T > 0$  et  $\beta \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^L)$  telle que la solution  $(h, \alpha)$  de (3.13)–(3.15) vérifie*

$$h(T) = h_1, \quad \alpha(T) = 0, \quad (3.17)$$

*avec la contrainte sur la variable de contrôle*

$$|\beta(t)|_2 \leq 1, \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \quad (3.18)$$

*et la contrainte sur la variable d'état*

$$|\alpha(t)|_2 \leq c, \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (3.19)$$

Le résultat de contrôlabilité est encore valable si on supprime la contrainte (3.18) sur le contrôle  $\beta$ . Cette contrainte permet de considérer un problème de contrôle optimal en temps minimal qui ne ferait pas sens sans cette contrainte (voir la section suivante).

Le Théorème 3.2.1 est démontré dans [3] en utilisant les outils de différentiation par rapport à la forme ainsi que la solution explicite des équations de Stokes extérieure à la sphère donnée par [SW89] (voir aussi [HB65]). On utilise le Théorème de Chow pour conclure à la contrôlabilité en montrant que la dimension de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs associés à (3.13)–(3.14) est maximale. Le Théorème 3.2.1 indique que 2 contrôles sont suffisants pour amener la sphère à une position verticale quelconque. Par ailleurs selon le Théorème de la "coquille Saint-Jacques" (voir Purcell [Pur77], Lauga-Powers [LP09] ou DeSimone-Alouges-Lefebvre [DAL09]), au moins deux contrôles sont nécessaires. Avec 6 modes de contrôles scalaires, on peut déformer la sphère pour atteindre n'importe quelle position  $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{R}^3$ .

### 3.3 Solutions en temps minimal d'un problème linéarisé

On s'intéresse à un problème de contrôle en temps minimal associé au système (3.13)–(3.15) avec les contraintes (3.18), (3.19) sur le contrôle et sur l'état. Le théorème de Filippov [AS04] assure l'existence d'un temps minimal pour (3.13)–(3.19). Plus précisément, on montre dans [3] que, pour tout  $L \geq 2$  et  $h_1 \in \mathbb{R}$ , il existe un temps minimal  $T^* \geq 0$  tel que le problème de contrôle (3.13)–(3.17) avec les contraintes (3.18), (3.19) admet une solution avec un contrôle  $\beta \in L^\infty(0, T, \mathbb{R}^L)$ . La contrainte (3.18) sur le contrôle  $\beta$  est importante car sinon on pourrait contrôler le système en un temps aussi petit qu'on veut et dans ce cas le problème de contrôle en temps minimal n'aurait pas de sens.

Dans cette section, on considère un modèle simplifié obtenu en linéarisant le terme  $\mathbf{f}(\alpha)$  dans (3.13). Pour ce système simplifié, des solutions optimales  $(T^*, h^*, \alpha^*, \beta^*)$  de (3.13)–(3.19) ont été

obtenues dans [3] et [2]. Le cas où on ignore la contrainte (3.19) sur l'état  $\alpha$  est considéré dans [3] et des solutions optimales explicites sont obtenues en appliquant le principe du maximum de Pontryagin. Les trajectoires optimales  $t \mapsto \alpha^*(t)$  obtenues sont dans un plan et décrivent des cercles. Le cas où on tient compte de la contrainte (3.19) sur l'état a été étudié dans [2] dans le cadre général d'un système nonholonomique qui généralise le système de Brockett (voir [Bro82], [Blo03]) avec une contrainte de borne sur l'état. Des solutions optimales explicites ont été obtenues en appliquant une version du principe du maximum de Pontryagin avec contraintes sur l'état. Les trajectoires optimales  $t \mapsto \alpha^*(t)$  sont toujours planes et constituées d'arcs de cercles.

En linéarisant le terme  $\mathbf{f}(\alpha)$ , on a (voir [SW89, eq. (2.12)])

$$\mathbf{f}(\varepsilon\alpha) = \varepsilon M^{SW}\alpha + o(\varepsilon) \quad (3.20)$$

et  $M^{SW}$  est la matrice de Shapere-Wilczek de taille  $L \times L$  définie par

$$M_{i,j}^{SW} = \begin{cases} \frac{(i+1)^2}{(2i+1)(2i+3)} & \text{si } j = i - 1, \\ \frac{-i^2+2i+5}{(2i+3)(2i+5)} & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Un modèle simplifié consiste à remplacer  $\mathbf{f}(\alpha)$  par la matrice  $M^{SW}$  dans (3.13). De façon plus générale, au lieu de considérer la matrice  $M^{SW}$  provenant de la linéarisation de  $\mathbf{f}(\alpha)$ , on considère une matrice  $M$  *non-symétrique*. Le problème simplifié de contrôle que l'on a étudié dans [2] est le suivant :

Soient une constante  $c \in (0, \infty]$  fixée, un entier  $L \geq 2$  et  $M$  une matrice non-symétrique de taille  $L \times L$ . Etant donné  $h_1 \in \mathbb{R}^*$ , on cherche le temps minimal  $T^* > 0$  pour lequel il existe  $(h, \alpha, \beta) \in W^{1,\infty}(0, T^*; \mathbb{R}) \times W^{1,\infty}(0, T^*; \mathbb{R}^L) \times L^\infty(0, T^*; \mathbb{R}^L)$  vérifiant

$$\dot{h} = \langle M\alpha, \beta \rangle \quad (3.22)$$

$$\dot{\alpha} = \beta \quad (3.23)$$

$$h(0) = 0, \quad \alpha(0) = \mathbf{0}. \quad (3.24)$$

$$h(T^*) = h_1, \quad \alpha(T^*) = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

$$|\beta(t)|_2 \leq 1, \quad t \in [0, T^*], \quad (3.26)$$

$$|\alpha(t)|_2 \leq c, \quad t \in [0, T^*]. \quad (3.27)$$

Pour le système (3.22)–(3.27), des solutions optimales explicites ont été obtenues (voir [2] et [3]).

**Théorème 3.3.1** *On désigne par  $A$  la partie antisymétrique de la matrice  $M$ , i.e.  $A = (M - M^\top)/2$ . Soient les deux valeurs réelles*

$$d^* = \sqrt{\frac{2|h_1|}{\pi\lambda^*}}, \quad \tau = \frac{\pi c}{2},$$

où  $\lambda^* = \max(|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } A)$ . Le temps minimal  $T^*$  du système (3.22)–(3.27) vaut :

$$T^* = \begin{cases} \pi d^* & \text{si } c \geq d^*, \\ \frac{\pi d^{*2}}{2c} + \tau & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.28)$$

De plus, le système (3.22)–(3.27) admet un contrôle en temps minimal  $\beta^* \in C^0([0, T^*]; \mathbb{R}^L)$  donné par :

$$\beta^*(t) = \gamma_1(t)\mathbf{w}_1 + \gamma_2(t)\mathbf{w}_2, \quad t \in [0, T^*], \quad (3.29)$$

où  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^L$  sont deux vecteurs orthonormés vérifiant  $A\mathbf{w}_1 = \lambda^*\mathbf{w}_2$  et  $A\mathbf{w}_2 = -\lambda^*\mathbf{w}_1$ . La fonction  $\mathbf{v} = (\gamma_1, \gamma_2) \in C^0([0, T^*]; \mathbb{R}^2)$  est définie de la façon suivante.

– si  $c \geq d^*$ , on a

$$\mathbf{v}(t) = R \left( \text{sign}(h_1) \frac{2\pi}{T^*} t \right) \mathbf{v}_0, \quad \text{pour tout } t \in [0, T^*]. \quad (3.30)$$

– si  $c < d^*$ , on a

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} R \left( \frac{2 \text{sign}(h_1)}{c} t \right) \mathbf{v}_0 & \text{si } t \in [0, \tau), \\ -R \left( \frac{\text{sign}(h_1)}{c} (t - \tau) \right) \mathbf{v}_0 & \text{si } t \in [\tau, T^* - \tau), \\ -R \left( \frac{\text{sign}(h_1)}{c} (2t - T^*) \right) \mathbf{v}_0 & \text{si } t \in [T^* - \tau, T^*]. \end{cases} \quad (3.31)$$

Le vecteur  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^2$  est choisi tel que  $|\mathbf{v}_0|_2 = 1$  et  $R$  désigne la matrice de rotation  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Le Théorème 3.3.1 donne une description complète de la trajectoire optimale  $t \mapsto \boldsymbol{\alpha}^*(t)$  associée au contrôle optimal  $\boldsymbol{\beta}^*$  donné par (3.29). En intégrant (3.29), on voit que la trajectoire optimale  $t \mapsto \boldsymbol{\alpha}^*(t)$  se situe dans le plan engendré par  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ .

Dans le cas où  $c \geq d^*$ , c'est-à-dire lorsque la borne  $c$  de la contrainte d'état est suffisamment grande, la trajectoire optimale  $t \mapsto \boldsymbol{\alpha}^*(t)$  décrit un cercle de diamètre  $d^* \leq c$  et qui passe par l'origine  $\mathbf{0}_L$ .

Lorsque  $c < d^*$ , la trajectoire optimale  $t \mapsto \boldsymbol{\alpha}^*(t)$  est une courbe  $C^1$  formée d'arc de cercles dans le plan engendré par  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ . En particulier, dans ce cas on a  $|\boldsymbol{\alpha}(t)| = c$  pour tout  $t \in [\tau, T^* - \tau]$  c'est-à-dire que la contrainte d'état est saturée sur l'intervalle de temps  $[\tau, T^* - \tau]$  et par ailleurs  $|\boldsymbol{\alpha}(t)| < c$  pour tout  $t \in [0, \tau) \cup (T^* - \tau, T^*]$ .

La Figure 3.1 montre un exemple typique de trajectoire optimale lorsque  $c < d^*$ , c'est-à-dire quand la borne de la contrainte d'état est suffisamment petite. La trajectoire est représentée dans le plan engendré par les deux vecteurs orthonormés  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$ .

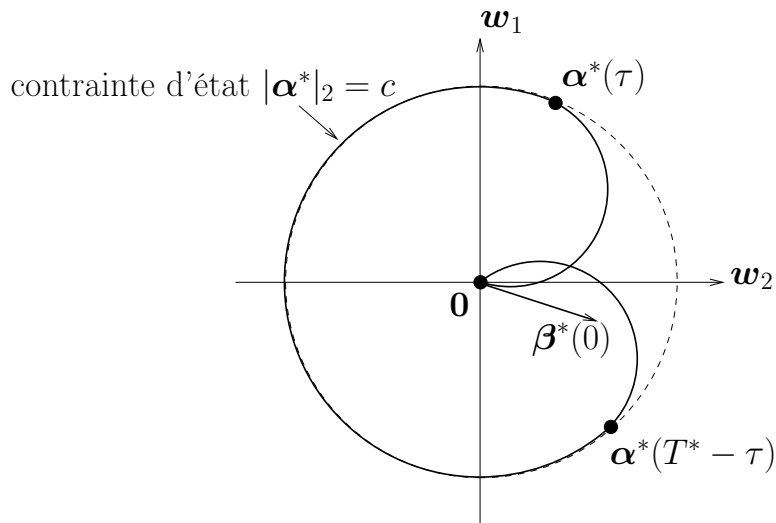


FIGURE 3.1 – Trajectoire optimale  $t \mapsto \boldsymbol{\alpha}^*(t)$  quand  $c < d^*$ .

Dans le cas où  $c \geq d^*$  c'est-à-dire quand la borne  $c$  de la contrainte d'état est suffisamment grande, la contrainte d'état ne joue aucun rôle puisque la trajectoire optimale n'atteint jamais la

contrainte. On retrouve dans ce cas des résultats obtenus par ailleurs par des techniques géométriques. Pour un système nonholonomique de dimension  $(2n + 1)$  avec  $n \geq 2$ , des formules explicites pour le temps minimal ainsi que pour les solutions optimales ont déjà été obtenues par Agrachev-Barilari-Boscain [ABB12, §5.2] pour le cas  $c = +\infty$  i.e. sans contrainte sur l'état. Le temps minimal est aussi calculé explicitement dans [BGG00, Cor.3.101] et les formules coïncident avec (3.28)–(3.30) dans le cas  $c \geq d^*$ . Dans [ABB12], les auteurs étudient les géodésiques sur le groupe d'Heisenberg vu comme une variété sous-riemannienne de contact nilpotente d'ordre 1 et de corang 1. Citons également les travaux de Beals-Gaveau-Greiner [BGG00, Th.1.41] et Prieur-Trélat [PT05] où toutes les solutions optimales sont obtenues pour un système nonholonomique de dimension 2 avec  $c = +\infty$ .

La démonstration du Théorème 3.3.1 repose sur le principe du maximum de Pontryagin. Dans le cas où la contrainte sur l'état (3.27) ne joue aucun rôle, les formules (3.28), (3.29) et (3.30) sont établies dans [3] pour  $c = +\infty$  à partir du principe de Pontryagin dans sa version standard (i.e. sans contrainte sur l'état). Dans le cas, où la contrainte d'état (3.27) opère avec  $c < d^*$ , les formules des trajectoires optimales sont démontrées dans [2] en utilisant une version étendue du principe du maximum de Pontryagin avec contrainte sur l'état. Cette version étendue fait intervenir une mesure de Radon positive pour prendre en compte la contrainte sur l'état. (voir Ioffe-Tihomirov [IT79], Harlt-Sethi-Vickson [HSV95]).

**Comportement du temps minimal pour  $M = M^{SW}$ .** Dans le cas où  $M = M^{SW}$  donnée par (3.21), on peut décrire le comportement du temps minimal par rapport au nombre de modes de déformations  $L$  (voir [3]).

**Proposition 1** *Pour le problème de contrôle (3.22)–(3.26) sans contrainte sur l'état et avec la matrice  $M = M^{SW}$ , le temps minimal  $T_L^*$  donné par (3.28) est une fonction décroissante du nombre  $L$  de modes de déformation et*

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} T_L^* = 2\sqrt{\pi|h_1|}.$$

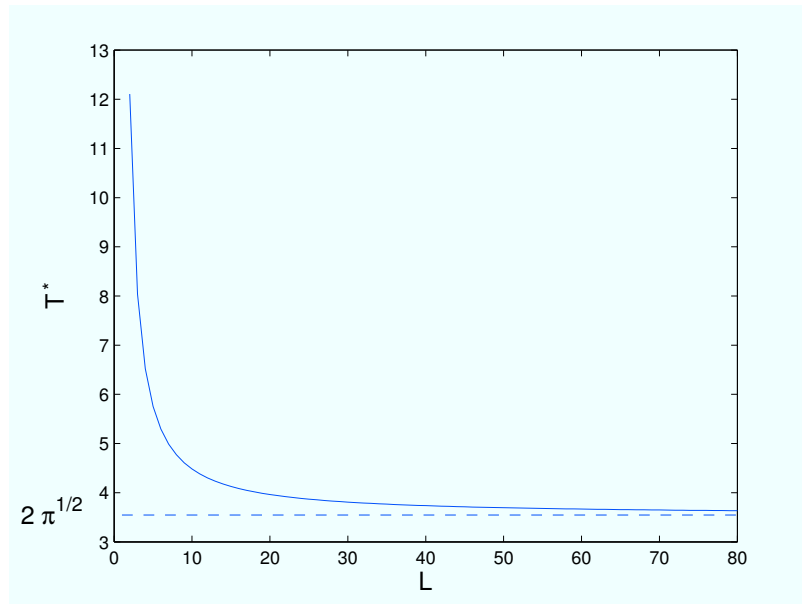


FIGURE 3.2 – Temps minimal  $T^*$  en fonction du nombre  $L$  de modes de déformations avec  $h_1 = 1$ .

### 3.4 Résultats numériques

On termine ce chapitre en donnant quelques exemples numériques obtenus à partir des résultats de la section précédente. Le premier exemple concerne le problème de contrôle optimal simplifié (3.22)–(3.26) sans contrainte sur l'état avec la matrice de Shapere-Wilczek  $M = M^{SW}$  donnée par (3.21). On choisit 10 modes de déformations ( $L = 10$ ) et la position verticale vaut  $h_1 = 1$ . La formule (3.28) donne  $T^* \simeq 4.483$ . La Figure 3.4 montre la sphère déformée dans le plan de coupe axisymétrique  $(y, z)$  à différents instants.

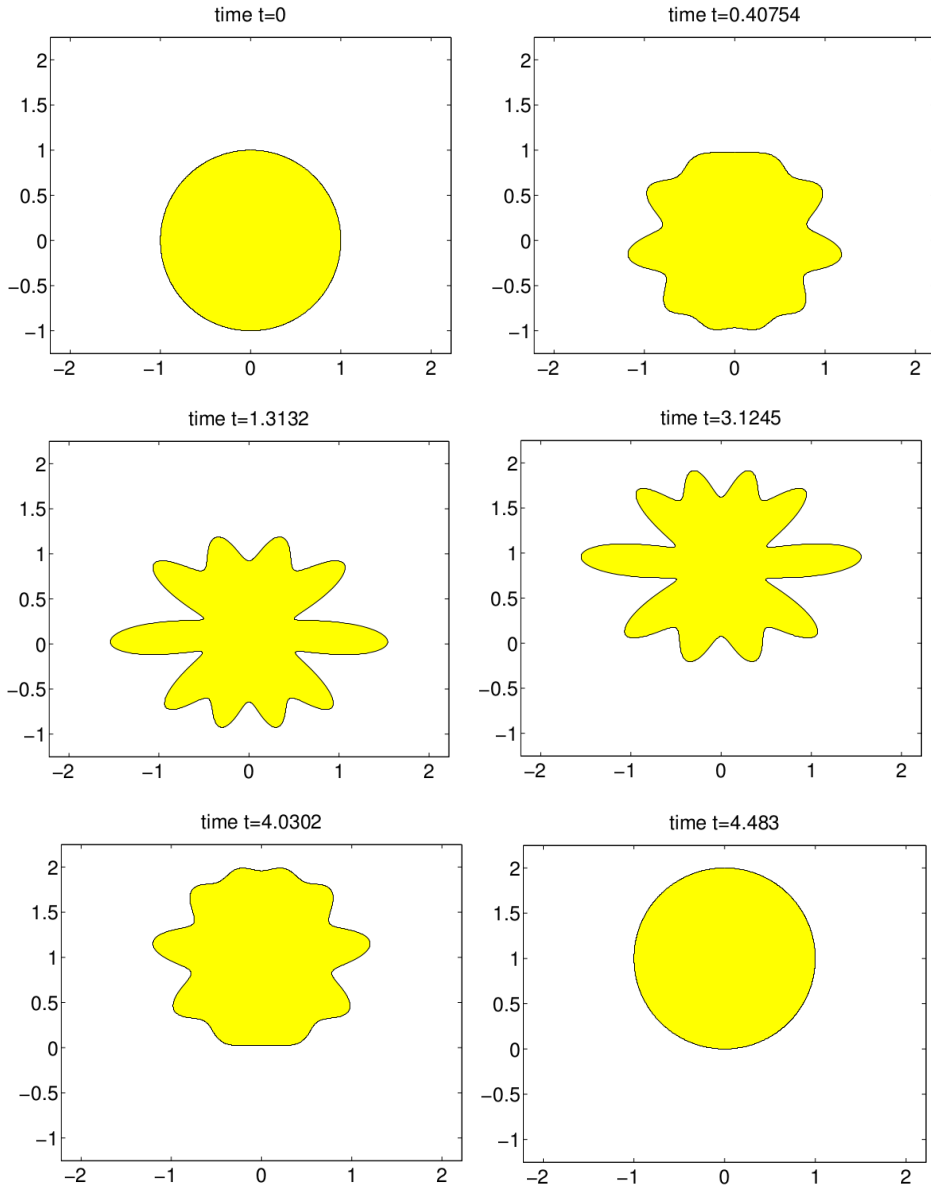


FIGURE 3.3 – Déformations en temps minimal sans contrainte d'état avec  $h_1 = 1$ ,  $L = 10$ ; coupes dans le plan axisymétrique  $(y, z)$ .

L'exemple suivant porte sur le problème de contrôle optimal simplifié (3.22)–(3.27) avec la contrainte sur l'état  $|\alpha|_2 \leq c$ . On choisit  $c = 0.2$  avec 2 modes de déformation ( $L = 2$ ) et  $h_1 = 1$ .

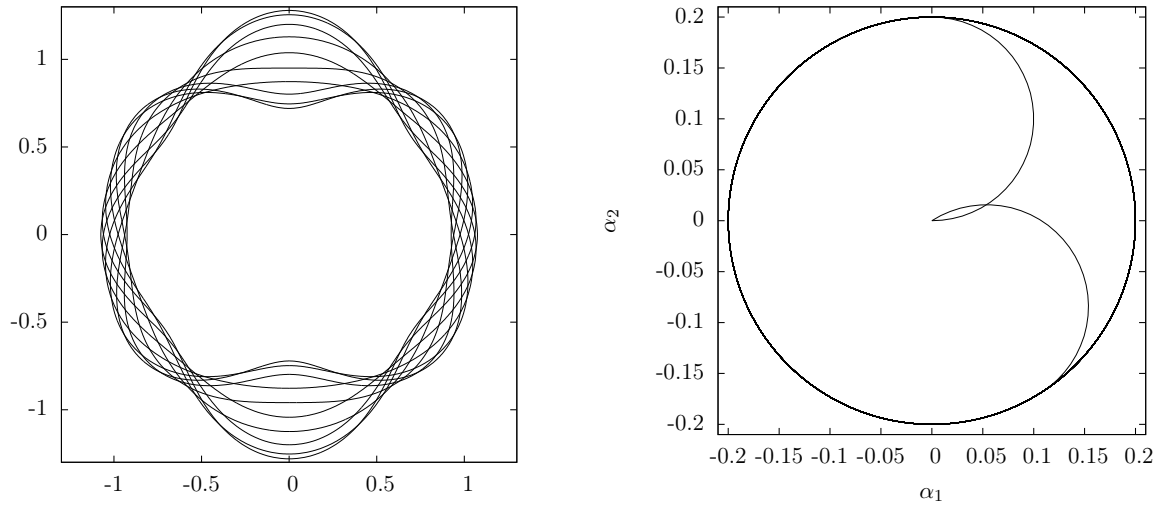


FIGURE 3.4 – Déformations optimales dans le plan de coupe axisymétrique (à gauche) et trajectoire optimale  $t \mapsto \alpha^*(t)$  (à droite) avec la contrainte sur l'état  $|\alpha|_2 \leq 0.2$  et 2 modes de déformations.

La Figure 3.4 montre les déformations optimales de la sphère dans le plan de coupe axisymétrique ainsi que la trajectoire optimale  $t \mapsto \alpha^*(t)$ . La trajectoire optimale de la position verticale du centre de masse  $t \mapsto h(t)$  n'est pas rectiligne comme l'illustre la Figure 3.5.

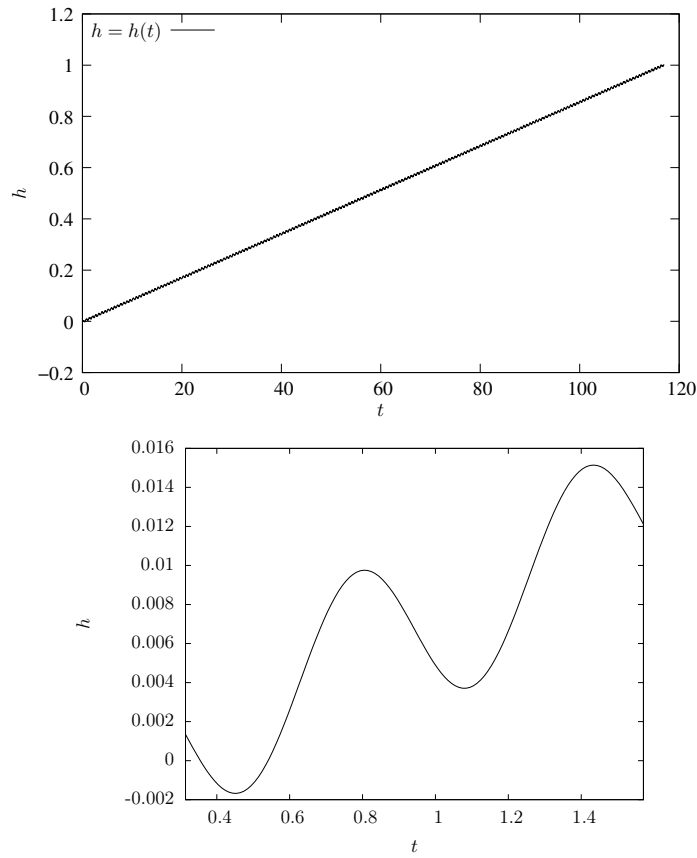


FIGURE 3.5 – Trajectoire optimale du centre de masse  $t \mapsto h(t)$  (en haut) et zoom (en bas).



## Deuxième partie

# Analyse et approximation numérique de quelques modèles de champ-de-phase





## Chapitre 4

# Modèles de champ-de-phase pour des transitions de phase

### 4.1 Modèles de champ-de-phase pour la solidification

Les modèles de champ-de-phase ont été principalement utilisés pour décrire les transitions de phase et les phénomènes de solidification dus aux effets thermiques pour des matériaux purs. Ces modèles conduisent à des systèmes d'EDP paraboliques nonlinéaires pour le champ-de-phase et la température (voir par exemple [Cag86], [EZ90], [Lau97]). Les modèles de champ-de-phase présentés dans cette section concernent les processus isothermes pour la solidification d'alliages binaires. Dans ces modèles, les mécanismes de solidification ne sont pas dus à la température mais à la diffusion de la concentration relative  $c$  d'un composé par rapport à l'autre. Un paramètre d'ordre  $\phi$  appelé "champ-de-phase" permet de prendre en compte l'état de solidification de l'alliage. Si  $\phi = 0$  alors le système est dans une phase solide et si  $\phi = 1$ , il est en phase liquide, les valeurs  $0 < \phi < 1$  indiquant une zone de mélange. Un tel modèle a été initialement proposé par Warren-Boettinger [WB95]. Dans cette section, on présente tout d'abord les résultats d'existence et d'unicité des solutions obtenus dans [13] pour un modèle de type Warren-Boettinger et dans [10] pour un cas dégénéré. L'approximation numérique du modèle de Warren-Boettinger est étudiée dans [12] où des estimations d'erreurs sont obtenues pour une méthode d'Eléments Finis. Des estimations d'erreurs a posteriori sont obtenues dans [11].

#### 4.1.1 Existence, unicité, propriétés des solutions

Un alliage binaire est constitué de deux composés A et B placés dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ , de bord  $\partial\Omega$  régulier. Le système est caractérisé d'une part par la concentration relative  $c = c(\mathbf{x}, t)$  du composé B par rapport au mélange, en  $\mathbf{x} \in \Omega$  et au temps  $t$ . D'autre part, un paramètre d'ordre  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$  indique l'état de solidification de l'alliage. Si  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$  alors l'alliage est à l'état solide en  $\mathbf{x}$ , à l'instant  $t$  et si  $\phi(\mathbf{x}, t) = 1$ , il est à l'état liquide. Une description thermodynamique menée à partir d'une fonctionnelle d'énergie libre de type Ginzburg-Landau [Cag86] conduit aux équations d'évolution suivantes pour  $c$  et  $\phi$  (voir [13], [21], [11] ou [Kes01] pour une modélisation détaillée).

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \phi + F_1(\phi) + c F_2(\phi) & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div} (D_1(\phi) \nabla c + D_2(c, \phi) \nabla \phi) & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \phi(0) = \phi_0, \quad c(0) = c_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans le problème (P), la constante  $\varepsilon > 0$  est un paramètre qui caractérise l'épaisseur de la zone de mélange où  $0 < \phi < 1$ .

Les fonctions  $F_1, F_2, D_1$  et  $D_2$  apparaissant dans (P) possèdent les propriétés suivantes :

- $F_1$  et  $F_2$  sont des fonctions régulières telles que  $F_i(0) = F_i(1) = 0$  pour  $i = 1, 2$ .
- (H) •  $D_1$  est une fonction régulière, strictement positive et bornée.
- $D_2$  est une fonction régulière telle que  $D_2(c, \cdot) = 0$  pour  $c = 0$  et  $c = 1$ .

Par ailleurs, les données physiques initiales  $c_0$  et  $\phi_0$  ont des valeurs comprises entre 0 et 1. D'un point de vue physique, les solutions  $c$  et  $\phi$  du problème (P) doivent également prendre leurs valeurs entre 0 et 1.

Pour établir le caractère bien-posé du problème (P), on fait dans un premier temps une hypothèse supplémentaire sur les termes nonlinéaires, en supposant que les fonctions  $F_i$  et  $D_i$ ,  $i = 1, 2$  sont lipschitziennes et bornées. Sous ces hypothèses, on montre l'existence de solution faible par une méthode de type Fado-Galerkin, puis on établit la régularité et l'unicité des solutions. Dans un second temps, on établit un principe du maximum sous les hypothèses supplémentaires que les fonctions  $F_1, F_2$  et  $D_2$  s'annulent en dehors des ensembles  $\{0 < c < 1\}$  et  $\{0 < \phi < 1\}$ . On montre que  $c$  et  $\phi$  restent entre 0 et 1 tant que les données initiales  $c_0$  et  $\phi_0$  prennent leurs valeurs entre 0 et 1. Ce principe du maximum justifie les hypothèses supplémentaires faites sur  $F_i$  et  $D_i$ ,  $i = 1, 2$  comme fonctions bornées et lipschitziennes et permet d'obtenir des solutions de (P) physiquement acceptables.

L'existence de solution faible de (P) est établie sous les hypothèses suivantes. On suppose que :

(H1) •  $F_1, F_2 \in C(\mathbb{R})$  sont des fonctions bornées, lipschitziennes avec

$$|F_i(r)| \leq M_1 \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } \forall r \in \mathbb{R}.$$

(H2) •  $D_1 \in C(\mathbb{R})$  est une fonction strictement positive, bornée, lipschitzienne avec

$$0 < D_s \leq D_1(r) \leq D_l, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

(H3) •  $D_2 \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  est une fonction bornée, lipschitzienne avec

$$|D_2(r_1, r_2)| \leq M_2, \quad \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On note  $V = H^1(\Omega)$  et  $V'$  son espace dual. On désigne par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$  le produit de dualité entre  $V'$  et  $V$  et enfin on note  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  pour  $T > 0$ . Le résultat d'existence de solution faible suivant est établi dans [13].

**Théorème 4.1.1** *On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites.*

*Pour tout  $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  et  $T > 0$ , il existe  $(\phi, c)$  vérifiant*

$$\phi, c \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; V'),$$

*telles que  $\phi(0) = \phi_0, c(0) = c_0$  et*

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V', V} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) v \, d\mathbf{x}, \quad (4.1)$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, w \right\rangle_{V', V} + \int_{\Omega} (D_1(\phi) \nabla c + D_2(c, \phi) \nabla \phi) \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} = 0, \quad (4.2)$$

*pour tout  $v, w \in H^1(\Omega)$  et p.p. dans  $(0, T)$ .*

Le résultat suivant également obtenu dans [13] concerne la régularité et l'unicité de la solution du problème (P).

**Théorème 4.1.2** *On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites.*

Soit  $\phi_0 \in H^2(\Omega)$  tel que  $\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$  sur  $\partial\Omega$  et  $c_0 \in H^1(\Omega)$ . Alors, pour tout  $T > 0$ , il existe un unique couple de fonctions  $(\phi, c)$  vérifiant

$$\begin{aligned} \phi &\in L^2(0, T; H^3(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)), \\ c &\in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned} \quad (4.3)$$

telles que  $\phi(0) = \phi_0$ ,  $c(0) = c_0$  et

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta \phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \quad p.p. \text{ dans } Q_T, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi) \nabla c + D_2(c, \phi) \nabla \phi) \quad p.p. \text{ dans } Q_T, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad p.p. \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (4.6)$$

Un principe du maximum s'applique aux solutions du problème (P), en faisant des hypothèses supplémentaires sur les termes nonlinéaires. Ce résultat permet de conclure à l'existence de solutions du problème (P) avec les hypothèses (H) physiquement acceptables introduites au début de la section. Par conséquent, en plus des hypothèses (H1), (H2) et (H3), on suppose que les termes nonlinéaires  $F_1$ ,  $F_2$  et  $D_2$  vérifient les hypothèses supplémentaires :

$$(H4) \quad F_1 \equiv F_2 \equiv 0 \text{ dans } (-\infty, 0] \cup [1, +\infty).$$

$$(H5) \quad D_2(\cdot, r_2) \equiv 0 \text{ dans } ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \text{ et pour tout } r_2 \in \mathbb{R}.$$

On obtient alors le résultat suivant :

**Théorème 4.1.3** *On suppose que les hypothèses (H1)-(H5) sont satisfaites.*

On suppose que les données initiales  $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  sont telles que

$$0 \leq \phi_0(x), \quad c_0(x) \leq 1 \text{ pour presque tout } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Pour tout  $T > 0$ , toute solution faible  $(\phi, c) \in (L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2 \cap (H^1(0, T; V'))^2$  vérifie, pour tout  $t \in [0, T]$

$$0 \leq \phi(x, t), \quad c(x, t) \leq 1 \text{ pour presque tout } \mathbf{x} \in \Omega.$$

On peut conclure au caractère bien-posé du problème (P) avec les hypothèses physiques (H) portant sur les fonctions nonlinéaires  $F_i$ ,  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ . La modélisation physique introduit des termes nonlinéaires  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $D_1$  et  $D_2$  qui sont des fonctions régulières et  $F_1$ ,  $F_2$  peuvent être choisies comme des polynômes de degré 4 dans l'intervalle  $[0, 1]$  et de façon quelconque en dehors de l'intervalle  $[0, 1]$  (voir [WB95], [21], [Kes01]). Une idée naturelle est de prendre des fonctions polynomiales de degré 4 sur toute la droite réelle. De cette façon, on ne peut pas directement appliquer les résultats d'existence et de régularité des Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2. Cependant, grâce aux propriétés d'annulation dans (H) c'est-à-dire avec  $F_1(\phi) = F_2(\phi) = 0$  pour  $\phi = 0$  et  $\phi = 1$  et  $D_2(c, \cdot) = 0$  pour  $c = 0$  et  $c = 1$ , on peut tronquer  $F_1$  et  $F_2$  à 0 en dehors de l'ensemble  $\{0 < \phi < 1\}$  et tronquer la fonction  $D_2$  à 0 en dehors de l'ensemble  $\{0 < c < 1\}$ . On obtient ainsi des fonctions nonlinéaires  $\tilde{F}_1$ ,  $\tilde{F}_2$  et  $\tilde{D}_2$  lipschitziennes et bornées vérifiant les hypothèses (H1),(H2),(H3). Dans ces conditions, les Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 s'appliquent avec  $\tilde{F}_1$ ,  $\tilde{F}_2$  et  $\tilde{D}_2$ . Par ailleurs, puisque  $\tilde{F}_1$ ,  $\tilde{F}_2$  et  $\tilde{D}_2$  vérifient également les hypothèses (H4) et (H5), le principe du maximum donné par le Théorème 4.1.3 s'applique avec des données physiques initiales  $0 \leq \phi_0, c_0 \leq 1$  et la solution  $(\phi, c)$

correspondante reste entre 0 et 1 lorsque le temps  $t$  évolue. Il s'ensuit que  $c$  et  $\phi$  ne dépendent pas du choix des extensions des fonctions  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $D_2$  en dehors de l'intervalle  $[0, 1]$ . Le problème physique  $(P)$  avec les hypothèses  $(\mathcal{H})$  est donc bien posé.

**Cas dégénéré.** Dans [10], j'ai étudié le problème  $(P)$  dans le cas dégénéré où la fonction  $D_1$  est positive mais peut s'annuler dans la phase solide. Plus précisément, l'hypothèse (H2) est remplacée par l'hypothèse (H2bis) :

$$\begin{aligned} \text{(H2bis)} \quad & D_1 \in C(\mathbb{R}) \text{ est une fonction positive ou nulle, bornée, lipschitzienne avec} \\ & 0 \leq D_s \leq D_1(r) \leq D_l, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le résultat d'existence obtenu dans [10] est le suivant.

**Théorème 4.1.4** *On suppose que les hypothèses (H1),(H2bis),(H3) et (H4),(H5) sont satisfaites.*

*Soit  $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  telles que  $\phi_0, c_0 \in [0, 1]$  p.p. dans  $\Omega$ . Pour tout  $T > 0$ , il existe  $(\phi, c, J)$  vérifiant*

$$\begin{aligned} \phi &\in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)), \text{ avec } \phi(0) = \phi_0, \\ c &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; V'), \text{ avec } c(0) = c_0, \\ J &\in L^2(Q_T)^2, \quad J = \nabla(D_1(\phi)c) - c\nabla D_1(\phi), \end{aligned}$$

tels que  $\phi, c \in [0, 1]$  p.p. dans  $Q_T$  et

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \phi + F_1(\phi) + cF_2(\phi) \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, v \right\rangle_{V', V} + \int_{\Omega} (J + D_1(\phi)D_2(c, \phi)\nabla\phi) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} &= 0, \\ \text{pour tout } v \in H^1(\Omega), \text{ p.p. dans } (0, T). \end{aligned} \quad (4.9)$$

La preuve de ce résultat d'existence est basée sur une technique de régularisation du coefficient dégénéré  $D_1$  (voir [Lau97] où cette technique a été utilisée pour un modèle de champ-de-phase différent) et un passage à la limite par compacité à partir d'estimations a priori de la solution du problème régularisé.

#### 4.1.2 Approximations par Eléments Finis

L'approximation numérique du problème  $(P)$  par Eléments Finis a été étudié dans [12] où des estimations d'erreurs sont obtenues et dans [11] pour des estimations a posteriori. Le schéma numérique étudié dans [12] est basé sur des Eléments Finis  $\mathbb{P}_1$  avec un schéma semi-implicite en temps. On transforme le problème  $(P)$  sous forme vectorielle en introduisant la variable  $\mathbf{u} = (\phi, \alpha c)^\top$  où  $\alpha > 0$  est une constante qui sera fixée ultérieurement. Le problème  $(P)$  s'écrit sous la forme du système vectoriel suivant. On cherche  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$(P_V) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \operatorname{div}(D(\mathbf{u})\nabla \mathbf{u}) + \mathbf{F}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $D$  est la matrice  $2 \times 2$  triangulaire donnée par :

$$D(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ \alpha D_2(c, \phi) & D_1(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} F_1(\phi) + cF_2(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

L'hypothèse  $(\mathcal{H})$  associée au problème  $(P)$  se traduit sur le système  $(P_V)$  par :

- (A1) ·  $\mathbf{F} \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$  est une fonction vectorielle lipschitzienne et bornée.
- (A2) ·  $D$  est une matrice  $2 \times 2$  triangulaire inférieure dont les coefficients sont des fonctions lipschitziennes et bornées. Les coefficients diagonaux de  $D$  sont bornés inférieurement par une constante strictement positive.
- (A3) · La matrice  $D$  est uniformément définie positive i.e. il existe une constante  $d_m > 0$  indépendante de  $\mathbf{u}$  telle que  $\mathbf{v}^\top D(\mathbf{u}) \mathbf{v} \geq d_m \mathbf{v}^\top \mathbf{v}$  pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ .

L'hypothèse (A3) est vérifiée par la matrice  $D(\mathbf{u})$  définie par (4.10) pourvu qu'on choisisse  $\alpha$  suffisamment petit. Sous les hypothèses (A1)–(A3) et si les données initiales  $\mathbf{u}_0 = (u_{0,1}, u_{0,2})^\top \in H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)^2$  vérifient  $\frac{\partial u_{0,1}}{\partial \mathbf{n}} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , alors les théorèmes d'existence précédents s'appliquent et pour tout  $T > 0$ , il existe une unique solution  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$  du problème  $(P_V)$  telle que  $u_1 \in C^0([0, T]; H^2(\Omega)) \cap H^1(\Omega \times (0, T))$  et  $u_2 \in C^0([0, T]; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . De plus, la formulation variationnelle de  $(P_V)$  s'écrit

$$(V) \begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \text{pour tout } \mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \text{ p.p. dans } (0, T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (4.11)$$

**Schéma numérique.** On suppose que le domaine  $\Omega$  est un polygone convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Le problème (V) est approché par un schéma d'Eléments Finis  $\mathbb{P}_1$  en espace et une discrétisation semi-implicite en temps. On note  $\mathcal{T}_h$  une triangulation régulière du domaine  $\Omega$  et on introduit l'espace

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \quad v_{hK} \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (4.12)$$

Pour un entier  $N \geq 1$  donné, on désigne par  $\tau = T/N$  le pas de discrétisation en temps et on introduit les instants  $t^n = n\tau$  pour  $n = 0, \dots, N$ .

On considère l'approximation  $\mathbf{u}_h^n$  de la solution exacte  $\mathbf{u}(\cdot, t^n)$ , vérifiant le problème approché suivant :

$$(P_{h,\tau}) \begin{cases} \text{Pour } n = 1, \dots, N, \text{ trouver } \mathbf{u}_h^n \in V_h \times V_h \text{ tel que, pour tout } \mathbf{v}_h \in V_h \times V_h, \\ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega} D(\mathbf{w}_h^{\theta,n}) \nabla \mathbf{u}_h^n : \nabla \mathbf{v}_h = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{u}_h^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_h, \\ \mathbf{u}_h^0 = r_h \mathbf{u}_0, \end{cases} \quad (4.13)$$

avec  $\theta \in [0, 1]$  et le vecteur  $\mathbf{w}_h^{\theta,n}$  est défini à partir de  $\mathbf{u}_h^n = (u_{1,h}^n, u_{2,h}^n)^\top$  et  $\mathbf{u}_h^{n-1}$  par

$$\mathbf{w}_h^{\theta,n} = \begin{pmatrix} (1 - \theta)u_{1,h}^{n-1} + \theta u_{1,h}^n \\ u_{2,h}^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

On choisit les données initiales  $\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  et dans le problème  $(P_{h,\tau})$ ,  $r_h$  désigne l'interpolant de Lagrange sur  $V_h \times V_h$ .

**Estimations d'erreurs.** On fait l'hypothèse supplémentaire que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  vérifie une hypothèse inverse de régularité c'est-à-dire on suppose qu'il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad h/h_K \leq \beta, \quad (4.15)$$

où  $h_K$  désigne le diamètre du triangle  $K$ . Le résultat de convergence du problème approché  $(P_{h,\tau})$  est obtenu dans [12].

**Théorème 4.1.5** *On suppose que les hypothèses (A1)-(A3) sont satisfaites et que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  vérifie l'hypothèse de régularité inverse (4.15). Si la solution  $\mathbf{u}$  du problème (P) appartient à  $H^1(0, T; H^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2))$ , alors il existe deux constantes  $C > 0$  et  $\tau^* > 0$  indépendantes de  $h$  et  $\tau$  telles que pour  $0 < \tau \leq \tau^*$ , on a*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}(\cdot, t^n) - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \leq C(h^2 + \tau). \quad (4.16)$$

Les estimations d'erreurs (4.16) sont obtenues en introduisant un projecteur elliptique vectoriel généralisé (voir [12]).

**Erreurs a posteriori.** Les estimations d'erreurs a posteriori sont à la base des techniques d'adaptation de maillage pour les méthodes d'Eléments Finis d'un grand nombre de problèmes. L'objectif est d'obtenir une estimation de l'erreur réelle (l'erreur estimée) et d'adapter le maillage selon cette erreur estimée. Dans [11], des estimations d'erreurs a posteriori ont été obtenues pour un schéma de semi-discrétisation par Eléments Finis du problème (P) avec la simplification que le coefficient  $D_1(\phi) = D_1 > 0$  est une constante.

Ce schéma s'écrit de la façon suivante. Pour tout  $t \in [0, T]$ , on cherche  $\phi_h(t) \in V_h$  et  $c_h(t) \in V_h$  tels que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} v_h \, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \nabla \phi_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left( F_1(\phi_h) + c_h F_2(\phi_h) \right) v_h \, d\mathbf{x}, \quad (4.17)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial c_h}{\partial t} w_h \, d\mathbf{x} + D_1 \int_{\Omega} \nabla c_h \cdot \nabla w_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} D_2(c_h, \phi_h) \nabla \phi_h \cdot \nabla w_h \, d\mathbf{x} = 0, \quad (4.18)$$

pour tout  $v_h, w_h \in V_h$ . On suppose que les données initiales vérifient

$$\phi_0, c_0 \in H^2(\Omega), \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (4.19)$$

et on prend  $\phi_h(0) = r_h \phi_0$ ,  $c_h(0) = r_h c_0$  où  $r_h$  est l'interpolant de Lagrange sur  $V_h$ .

Pour obtenir des estimations d'erreurs a posteriori, il faut disposer d'estimations a priori pour l'erreur

$$\int_0^T \left( \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(c - c_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt.$$

On suppose donc que l'erreur en norme  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  converge plus vite que l'erreur en norme  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , c'est-à-dire qu'il existe deux constantes  $C > 0$  et  $s \in (0, 1]$  indépendantes de  $h$  telles que

$$\int_0^T \left( \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|c - c_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \leq Ch^{2s} \int_0^T \left( \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(c - c_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt. \quad (4.20)$$

Une telle hypothèse est satisfaite avec  $s = 1$  si, par exemple l'erreur en norme  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  est en  $\mathcal{O}(h^2)$  et l'erreur en norme  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  en  $\mathcal{O}(h)$ .

On suppose également que l'erreur initiale converge plus vite que l'erreur en norme  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  c'est-à-dire qu'il existe deux constantes  $C > 0$  et  $r \in (0, 1]$  indépendantes de  $h$  telles que

$$\|(\phi - \phi_h)(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(c - c_h)(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^{2r} \int_0^T \left( \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(c - c_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (4.21)$$

Pour les données initiales satisfaisant (4.19), l'erreur initiale en norme  $L^2(\Omega)$  est en  $\mathcal{O}(h^2)$ . L'hypothèse (4.21) est satisfaite avec  $r = 1$  si, par exemple l'erreur en norme  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  est en  $\mathcal{O}(h)$ .

Les estimations d'erreurs a posteriori pour le problème (4.17),(4.18) font intervenir deux estimateurs locaux. On introduit l'estimateur d'erreur local  $\eta_K$  correspondant à l'équation pour  $\phi$  dans  $(P)$  et défini par

$$\eta_K^2 = h_K^2 \left\| \frac{\partial \phi_h}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta \phi_h - F_1(\phi_h) - c_h F_2(\phi_h) \right\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_K} |\ell| \left\| \varepsilon^2 [\nabla \phi_h \cdot \mathbf{n}] \right\|_{L^2(\ell)}^2, \quad (4.22)$$

pour tout triangle  $K \in \mathcal{T}_h$ . L'ensemble  $E_K$  désigne les arêtes du triangle  $K$  et  $[\cdot]$  représente le saut à travers l'arête courante. De façon similaire, on introduit l'estimateur d'erreur local  $\mu_K$  correspondant à l'équation pour  $c$  dans  $(P)$ , défini par

$$\mu_K^2 = h_K^2 \left\| \frac{\partial c_h}{\partial t} - D_1 \Delta c_h - \operatorname{div} (D_2(c_h, \phi_h) \nabla \phi_h) \right\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_K} |\ell| \left\| \left[ (D_1 \nabla c_h + D_2(c_h, \phi_h) \nabla \phi_h) \cdot \mathbf{n} \right] \right\|_{L^2(\ell)}^2. \quad (4.23)$$

Une borne supérieure de l'erreur faisant intervenir les estimateurs explicites  $\eta_K$  et  $\mu_K$  est obtenue dans [11].

**Théorème 4.1.6** *On suppose que les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , (4.19), (4.20) et (4.21) sont satisfaites. Soient  $(\phi, c)$  la solution de  $(P)$  et  $(\phi_h, c_h)$  la solution de (4.17), (4.18). On définit enfin la constante positive  $M_2 = \|D_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$  dépendant seulement de la forme du maillage telle que, pour  $h$  suffisamment petit, on a*

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_0^T \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon^2 D_1^2}{4M_2^2} \int_0^T \|\nabla(c - c_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 + \frac{\varepsilon^2}{2M_2^2} \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mu_K^2 \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

où les estimateurs  $\eta_K^2$ ,  $\mu_K^2$  sont définis par (4.22), (4.23).

Ce résultat est obtenu en bornant l'erreur tout d'abord par les résidus des équations pour  $\phi_h$  et  $c_h$ , puis par les estimateurs d'erreurs explicites en utilisant classiquement l'interpolant de Clément. Une borne inférieure de l'erreur faisant intervenir les estimateurs explicites  $\eta_K$  et  $\mu_K$  a été également obtenue dans [11, Th. 9], sous des hypothèses analogue à (4.20) ainsi que des estimations de stabilité pour les termes  $\nabla \partial \phi_h / \partial t$  et  $\nabla \partial c_h / \partial t$ .

**Adaptation de maillage.** Les estimations d'erreurs obtenus dans le Théorème 4.1.6 permettent de développer une stratégie d'adaptation de maillage. Le principe est de construire une suite de triangulations  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^1, \dots, \mathcal{T}_h^N$  telle que, à chaque itération en temps les erreurs relatives estimées



soient proches d'une valeur de tolérance TOL. Plus précisément, on cherche une triangulation  $\mathcal{T}_h$  pour laquelle

$$0.5 \text{ TOL} \leq \frac{\frac{1}{D_1} \left( \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tilde{\mu}_K^2 \right)^{1/2}}{\left( \int_0^T \|\nabla c_h\|^2 \right)^{1/2}} \leq 1.5 \text{ TOL}. \quad (4.25)$$

Ici  $\tilde{\mu}_K$  est l'estimateur modifié correspondant au terme des sauts intérieurs dans l'estimateur  $\mu_K$ , c'est-à-dire

$$\tilde{\mu}_K^2 = \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_K} |\ell| \left\| \left[ \left( D_1 \nabla c_h + D_2(c_h, \phi_h) \nabla \phi_h \right) \cdot \mathbf{n} \right] \right\|_\ell^2.$$

Pour la stratégie d'adaptation de maillage, on considère uniquement l'estimateur d'erreurs pour la concentration  $c$ . En effet, les fonctions  $\phi$  et  $c$  varie fortement dans une petite zone correspondant à l'interface solide-liquide. Cependant la concentration  $c$  peut varier aussi dans d'autres régions du domaine, alors que le paramètre d'ordre  $\phi$  ne varie pas en dehors de la zone d'interface solide-liquide. La Figure 4.1 présente des profils du champ-de-phase et de la concentration.

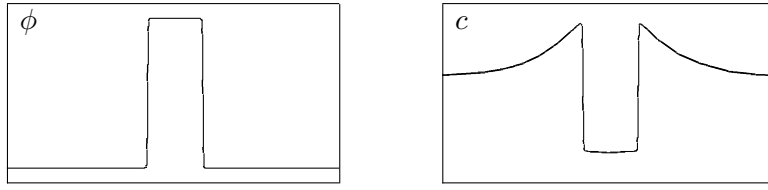


FIGURE 4.1 – Profils typiques du champ-de-phase  $\phi$  (à gauche) et de la concentration  $c$  (à droite).

On peut vérifier numériquement que les deux estimateurs  $\eta_K$  et  $\mu_K$  fournissent une bonne approximation de l'erreur réelle à un facteur près proche de 4 (voir [11, Section 6]). Par conséquent, si on atteint (4.25), on espère contrôler l'erreur relative réelle sur la concentration

$$\frac{\left( \int_0^T \|\nabla c - c_h\|^2 \right)^{1/2}}{\left( \int_0^T \|\nabla c_h\|^2 \right)^{1/2}}.$$

Une façon simple de réaliser (4.25) est de trouver une triangulation  $\mathcal{T}_h^n$  pour  $n = 1, 2, \dots, N$ , telle que

$$0.5^2 \text{ TOL}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla c_h\|^2 \leq \frac{1}{D_1^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tilde{\mu}_K^2 \leq 1.5^2 \text{ TOL}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla c_h\|^2. \quad (4.26)$$

Si l'inégalité (4.26) est vérifiée, on passe à l'itération en temps suivante. Si l'inégalité n'est pas vérifiée, alors on raffine ou déraffine le maillage afin d'équidistribuer l'estimateur d'erreur local. Des sommets sont ajoutés ou supprimés et une triangulation de Delaunay est générée. On répète le procédé jusqu'à ce que les inégalités soient satisfaites.

Cette stratégie d'adaptation de maillage a été appliquée sur un exemple de croissance dendritique lors d'un processus de solidification par diffusion de la concentration relative (on parle alors de dendrite solutale). Afin de prendre en compte des effets d'anisotropie, on remplace le paramètre  $\varepsilon^2$  par  $\varepsilon^2 a(\theta)^2$  où  $a(\theta) = 1 + \bar{a} \cos(\theta)$  et  $\theta$  désigne l'angle entre  $\nabla \phi$  et l'axe horizontal. Le domaine  $\Omega$

est un carré de côté  $l = 3.6 \times 10^{-5}$ . La région solide initiale est un cercle de rayon  $2 \times 10^{-7}$  centré au milieu de  $\Omega$  avec une concentration initiale de  $c_0 = 0.3994$ . La partie liquide a une concentration initiale  $c_0 = 0.40831$ . Le paramètre d'anisotropie vaut  $\bar{a}$ . La Figure 4.2 montre l'adaptation de maillage, la concentration et le champ-de-phase à différents instants, dans le quart supérieur droit du domaine  $\Omega$ . La Figure 4.3 montre l'état du système reconstitué dans tout le domaine  $\Omega$ .

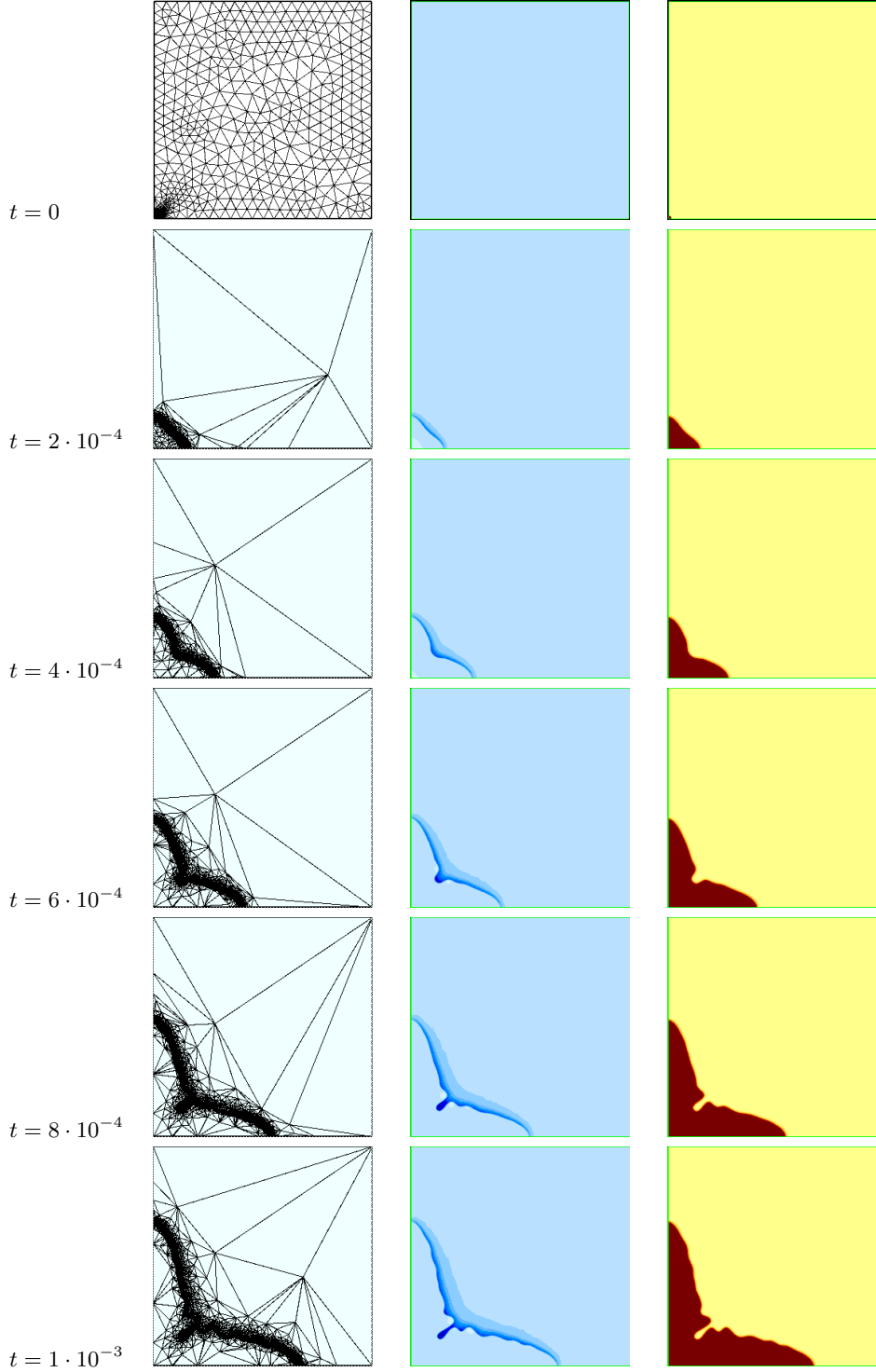


FIGURE 4.2 – Croissance dendritique. Maillages adaptés (à gauche), concentration  $c$  (au centre), champ-de-phase (à droite) à différents instants.

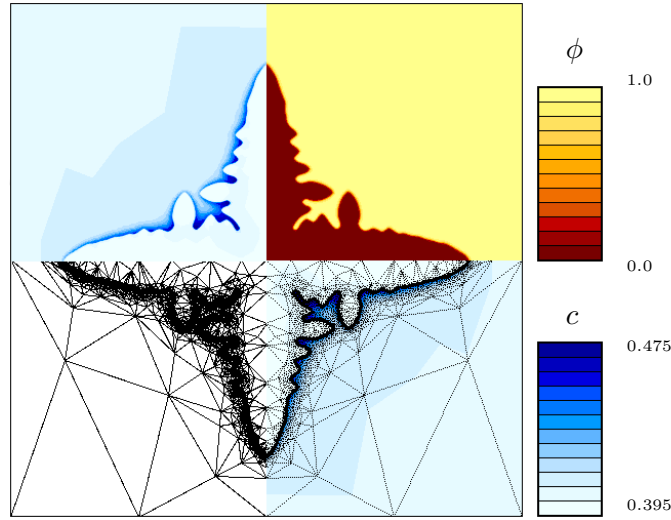


FIGURE 4.3 – Concentration  $c$  (en haut à gauche), champ-de-phase  $\phi$  (en haut à droite) et adaptation du maillage lors de la formation de dendrite solutale.

## 4.2 Modèles de séparation de phases

Dans [9] et [20], nous avons étudié un modèle de séparation de phases dans un alliage binaire. Le processus de solidification modélisé se déroule à température constante et le système est caractérisé par la concentration relative  $c$  d'un composé par rapport à l'alliage et par un paramètre d'ordre  $\phi$  ( $\phi = 0$  dans la phase solide,  $\phi = 1$  dans la phase liquide). Les fonctions  $c$  et  $\phi$  vérifient le système

$$\partial_t \phi - \Delta \phi = F_1(\phi) + c F_2(\phi), \quad (4.27)$$

$$\partial_t c - \operatorname{div}(\mu(\phi, c) \nabla w) = 0, \quad (4.28)$$

$$w \in -\Delta c + \beta(c) + \gamma(c) + g(\phi), \quad (4.29)$$

avec des conditions de flux nuls pour  $\phi$  et  $c$  sur le bord ainsi que des données initiales  $\phi_0$  et  $c_0$ . Dans (4.29),  $\beta := \partial I_{[0,1]}$  désigne le sous-différentiel de la fonction indicatrice de  $[0, 1]$ . Les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sont régulières et s'annulent pour  $\phi = 0$  et  $\phi = 1$ . Ce système est composé d'une équation de Cahn-Hilliard pour la concentration couplée à une équation parabolique du second ordre pour le champ-de-phase. Le coefficient de mobilité  $\mu$  dépend à la fois de  $c$  et  $\phi$  mais il ne présente pas de caractère dégénéré.

L'alliage est contenu dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ , supposé borné et régulier. On note les espaces  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$  et on définit la valeur moyenne  $\zeta_\Omega$  de  $\zeta \in V'$  par

$$\zeta_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \langle \zeta, 1 \rangle_{V', V}. \quad (4.30)$$

Pour établir le caractère bien posé du problème (4.28),(4.29), on fait les hypothèses suivantes :

- $\mu \in \operatorname{Lip}_{loc}(\mathbb{R}^2)$  avec  $0 < \alpha \leq \mu \leq \mu_0$  p.p. dans  $\mathbb{R}^2$ . (4.31)

- $F_1, F_2, \gamma, g \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ , (4.32)

- $\phi_0 \in H$ ,  $c_0 \in V$ , (4.33)

- $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est un graphe maximal monotone tel que  $0 \in \beta(0)$ . (4.34)

Soit une fonction convexe  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  semi-continue inférieurement telle que  $\beta = \partial\psi$  et  $\psi(0) = 0$ . On suppose également que

$$\bullet \psi(c_0) \in L^1(\Omega), \quad (4.35)$$

$$\bullet c_\Omega := (c_0)_\Omega \in \text{int } D(\beta), \quad (4.36)$$

où  $D(\beta) := \{r \in \mathbb{R} : \beta(r) \neq \emptyset\}$  désigne le domaine du graphe  $\beta$ . On introduit également l'opérateur de Laplace  $B : V \rightarrow V'$  avec les conditions de Neumann homogènes :

$$\langle Bu, y \rangle_{V', V} := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla y \, d\mathbf{x} \quad \text{pour } u, y \in V, \quad (4.37)$$

ainsi que l'opérateur elliptique  $B_{(v,z)}$  associé à un couple de fonctions  $(v, z)$  mesurables dans  $\Omega$  :

$$\langle B_{(v,z)}u, y \rangle_{V', V} := \int_{\Omega} \mu(v, z) \nabla u \cdot \nabla y \, d\mathbf{x} \quad \text{pour } u, y \in V, \quad (4.38)$$

Le résultat principal d'existence de solution du problème (4.28)–(4.29) est obtenu dans [9].

**Théorème 4.2.1** *Sous les hypothèses (4.31)–(4.36), il existe un quadruplet  $(\phi, c, w, \xi)$  tel que*

$$\phi \in H^1(0, T; V') \cap L^2(0, T; V), \quad (4.39)$$

$$c \in H^1(0, T; V') \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \quad (4.40)$$

$$w \in L^2(0, T; V), \quad (4.41)$$

$$\xi \in L^2(0, T; H), \quad (4.42)$$

*vérifiant*

$$\partial_t \phi + B\phi = F_1(\phi) + c F_2(\phi) \quad \text{dans } V', \text{ p.p. dans } (0, T), \quad (4.43)$$

$$\partial_t c + B_{(\phi, c)} w = 0 \quad \text{dans } V', \text{ p.p. dans } (0, T), \quad (4.44)$$

$$w = Bc + \xi + \gamma(c) + g(\phi) \quad \text{dans } V', \text{ p.p. dans } (0, T), \quad (4.45)$$

$$\xi \in \beta(c) \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.46)$$

$$\phi(\cdot, 0) = \phi_0(\cdot), \quad c(\cdot, 0) = c_0(\cdot) \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (4.47)$$

*Par ailleurs,  $c$  est un paramètre d'ordre conservé, i.e.,*

$$c(t)_\Omega = c_\Omega \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.48)$$

*De plus, si on suppose que  $F_1(0) = F_1(1) = F_2(0) = F_2(1) = 0$ , que  $\beta = \partial I_{[0,1]}$  et que les données initiales vérifient*

$$0 \leq \phi_0 \leq 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (4.49)$$

$$0 \leq c_0 \leq 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (4.50)$$

$$0 \leq (c_0)_\Omega \leq 1, \quad (4.51)$$

*alors, il existe une solution de (4.43)–(4.47) telle que*

$$\phi, c \in L^\infty(\Omega \times (0, T)) \text{ avec } 0 \leq \phi, c \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega \times (0, T). \quad (4.52)$$

La preuve du résultat d'existence est basée sur une méthode de Fado-Galerkin et une régularisation du système en remplaçant  $\beta$  par son approximation de Yosida  $\beta_\epsilon$ , puis en passant à la limite avec  $\epsilon \rightarrow 0$ . Dans [9], un résultat de régularité des solutions est obtenu ainsi qu'une propriété de continuité des solutions par rapport aux données initiales (fournissant de fait un résultat d'unicité). Des propriétés d'unicité et de régularité supplémentaires sont obtenues dans [20].



Troisième partie

Perspectives



Mes recherches en cours et à venir se concentrent principalement sur des problématiques d'interactions fluide-structure. Les thèmes envisagés sont les suivants :

1. Analyse de convergence d'une méthode des caractéristiques modifiées pour l'interaction fluide-solide déformable.
2. Méthodes des patches pour les problèmes d'évolution. Applications aux systèmes fluide-rigide. Adaptation de maillages.
3. Contrôle optimal pour la nage.
4. Estimations d'erreurs pour un problème de pénalisation des équations de Stokes avec un rigide.
5. Optimisation de forme pour un système fluide-structure couplant les équations de Stokes stationnaires avec l'élasticité linéaire.

Les deux premiers thèmes sont dans le prolongement de ce qui est présenté dans ce manuscrit concernant la méthode des caractéristiques modifiées pour traiter le cas d'un couplage fluide-solide déformable. Le thème de contrôle optimal concerne les perspectives relatives à l'étude de la nage à bas nombre de Reynolds. Les deux derniers thèmes constituent de nouvelles problématiques.

## 1. Méthodes des caractéristiques modifiées pour le cas déformable

La méthode des caractéristiques modifiées présentée à la Section 2.3.2 du Chapitre 2 (voir également [1]) n'a pas encore été analysée. Actuellement, il n'y a pas de résultat de convergence pour le schéma de discrétisation complet espace -temps (2.37), (2.38) avec les caractéristiques modifiées (2.42), (2.43). On souhaite établir un résultat de convergence analogue au Théorème 1.3.3 du Chapitre 1 pour le cas d'un système fluide-rigide avec des densités hétérogènes. Dans un premier temps, on s'intéressera à un schéma semi-discrétisé en temps avec la caractéristique modifiée  $\bar{\mathbf{X}}^k$  définie par  $\bar{\mathbf{X}}^k(\mathbf{x}) = \chi^k(t_k; t_{k+1}, \mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ , où  $\chi^k$  est la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \chi^k(t; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}^k(\chi^k(t; t_{k+1}, \mathbf{x})), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ \chi^k(t_{k+1}; t_{k+1}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}^k + R_{\theta^k} \Pi(t_k; t_{k+1}, R_{-\theta^{k+1}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^{k+1})), \end{cases} \quad (53)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{u}}^k(\mathbf{z}) = \mathbf{u}^k(\mathbf{z}) - \mathbf{u}^k(\boldsymbol{\xi}^k) - \frac{\theta^{k+1} - \theta^k}{\Delta t} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\xi}^k)^\perp - \Lambda^k(\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, \quad (54)$$

où  $\mathbf{u}^k(\mathbf{z})$  est étendu à zéro en dehors du domaine  $\mathcal{O}$ . Le relèvement  $\Lambda^k$  qui apparait dans (54) est défini par  $\Lambda^k(\mathbf{x}) = R_{\theta^k} \Lambda^*(R_{-\theta^k}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^k), t_k)$  et la vitesse de déformation  $\Lambda^*$  étendue à tout le domaine  $\mathcal{O}$  est donnée par (2.23). La fonction  $\Pi$  dans (53) est définie par (2.41).

On connaît déjà quelques (bonnes) propriétés de la caractéristique  $\bar{\mathbf{X}}^k$ . En effet, par construction,  $\bar{\mathbf{X}}^k$  envoie le solide déformé  $S^{k+1}$  à l'instant  $t_{k+1}$  exactement sur le solide déformé  $S^k$  à l'instant  $t_k$  i.e.  $\bar{\mathbf{X}}^k(S^{k+1}) = S^k$ ; De plus, si on étend la fonction densité  $\rho^k$  à  $\rho_f$  en dehors de  $\mathcal{O}$ , on a généralement  $\rho^{k+1} \neq \rho^k \circ \bar{\mathbf{X}}^k$  (contrairement au cas rigide), mais il est facile de montrer (grâce à la propriété d'invariance mentionnée précédemment) l'estimation

$$\|\rho^{k+1} - \rho^k \circ \bar{\mathbf{X}}^k\|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leq C^* \Delta t, \quad (55)$$

où  $C^* > 0$  est une constante dépendante de  $\Lambda^*$  mais indépendante de  $\Delta t$ .



Cependant, une difficulté majeure demeure avec la définition (53),(54) de la caractéristique  $\bar{\mathbf{X}}^k$ . Cette difficulté est due au fait que le champ de vitesse  $\tilde{\mathbf{u}}^k$  apparaissant dans (53) n'est pas à divergence nulle, contrairement à ce qui se passe pour le cas du système fluide-rigide. En effet, la vitesse de déformation  $\Lambda^*$  n'est pas en général à divergence nulle dans  $\mathcal{O}$  car  $\text{div}(\mathbf{w}^*) \neq 0$  et par conséquent  $\text{div}(\Lambda^k) \neq 0$  dans  $\mathcal{O}$ . La conséquence est que généralement  $\det \nabla \bar{\mathbf{X}}^k \neq 1$ . On doit donc estimer le jacobien  $\det \nabla \bar{\mathbf{X}}^k$  et espérer obtenir une estimation de la forme

$$\|f \circ \bar{\mathbf{X}}^k\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq (1 + C\Delta t)\|f\|_{L^2(\mathcal{O})}, \quad (56)$$

pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  telle que  $f = 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$  et  $C > 0$  est une constante dépendante de  $\Lambda^*$  mais indépendante de  $\Delta t$ . Une telle estimation permettrait de contrôler tous les termes où la caractéristique  $\bar{\mathbf{X}}^k$  apparaît. On espère ainsi obtenir un résultat de convergence pour la caractéristique modifiée dans le cas d'un solide déformable.

Une autre question, d'ailleurs liée à la difficulté essentielle mentionnée ci-dessus, concerne le projecteur  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  sur l'espace  $\mathcal{R}_h(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  défini par (1.118) dans le cas d'une discrétisation complet espace-temps. La question est de savoir si on peut obtenir un résultat de convergence en supprimant le projecteur  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}, \theta)$  de la définition de la caractéristique (1.115). Ce projecteur a été introduit car précisément en général le champ de vitesse  $\mathbf{u}_h^k$  définissant la caractéristique n'est pas à divergence nulle alors que  $\text{div}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_h^k, \theta_h^k)\mathbf{u}_h^k) = 0$ . Dans [Sül88], Süli parvient à estimer le jacobien de  $\bar{\mathbf{X}}_h^k$  pour les équations de Navier-Stokes seules sans rigide mais sans avoir recours au projecteur  $\mathbf{P}$ .

Ce travail est en cours et en collaboration avec J. San Martín de l'Université de Santiago (Chili) et L. Smaranda de l'Université de Pitești (Roumanie).

## 2. Contrôle optimal pour la nage

**Généralisation des contraintes.** Les contraintes d'état du problème de contrôle optimal pour la nage à bas Reynolds portent sur la norme euclidienne des déformations. Ces contraintes sont nécessaires pour assurer en particulier le caractère bijectif de la déformation de la sphère. Le choix de la norme euclidienne est arbitraire et on peut envisager une autre norme (norme  $L^\infty$ , ...). Que deviennent alors les propriétés des solutions optimales du problème simplifié ? Pour des contraintes plus générales sur l'état, la contrainte sera-t-elle toujours atteinte tangentiellement comme c'est le cas avec la norme euclidienne ?

Par ailleurs, concernant la contrainte sur le contrôle, on a imposé une borne sur la norme euclidienne du contrôle. Ce choix n'est évidemment pas anodin car en considérant la norme euclidienne, le problème peut s'interpréter comme la recherche de géodésiques sur une sous-variété Riemannienne. Il serait intéressant d'étudier le cas des contraintes sur le contrôle pour une autre norme que la norme euclidienne, en considérant la norme infinie par exemple.

**Etude du problème nonlinéaire de la nage à bas Reynolds.** Les déformations optimales du Chapitre 3 ont été obtenues pour un problème de contrôle optimal simplifié correspondant exactement au problème linéarisé du problème complet nonlinéaire (3.13)–(3.15). Il s'agit d'une étape importante pour étudier ensuite les propriétés des solutions optimales du problème complet nonlinéaire. Numériquement, on constate que les solutions optimales du problème nonlinéaire n'ont pas le même comportement que les solutions optimales pour le problème linéarisé. La figure 4 ci-dessous montre les déformations optimales obtenues avec 2 modes et la contrainte sur l'état  $|\boldsymbol{\alpha}|_2 \leq 0.3$  pour le problème complet nonlinéaire (3.13)–(3.15). La méthode numérique utilisée est une méthode directe qui consiste à calculer la force verticale exercée par le fluide sur le corps déformable et à discrétiser par différences finies les équations différentielles pour obtenir des contraintes d'un problème de minimisation nonlinéaire (voir [Loh12] pour plus de détails).

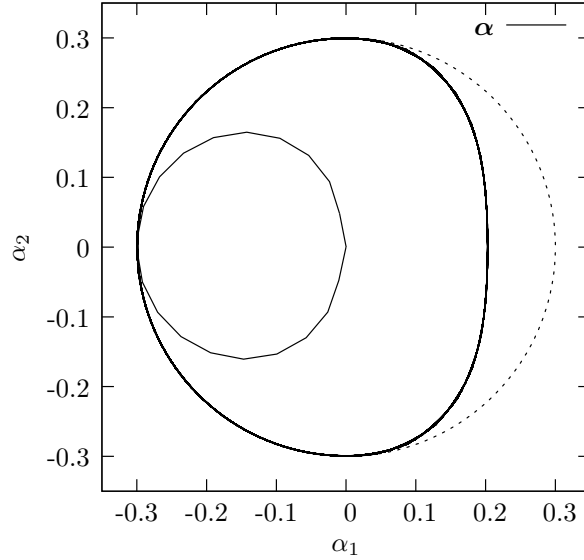


FIGURE 4 – Trajectoire optimale  $t \mapsto \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  obtenue *numériquement* avec 2 modes de déformations et la contrainte sur l'état  $|\alpha(t)| \leq 0.3$  pour le problème nonlinéaire de la nage.

Le résultat obtenu à la figure 4 est à comparer avec les trajectoires optimales obtenues à la figure 3.4 du Chapitre 3 pour le problème linéarisé. Dans la figure 4, les contraintes sur l'état, une fois atteintes, ne sont pas toujours saturées contrairement avec ce qui se passe pour le problème linéarisé.

**Contrôle optimal pour un système Stokes/Elasticité.** Le problème de contrôle optimal étudié pour la nage est un problème en temps minimal. D'autres fonctions coût sont envisageables, par exemple en considérant l'*efficacité hydrodynamique* définie comme le rapport entre la puissance nécessaire pour déplacer le nageur sans déformation à une vitesse moyenne donnée et le travail moyen effectué par le nageur<sup>1</sup>. Cet objectif a été considéré par exemple dans [SW89], [ADL08], [ML10]. Un modèle sans doute plus réaliste consiste à coupler les équations de Stokes avec les équations de l'élasticité linéaire. Les contrôles sont alors les forces appliquées à la structure élastique et un objectif pertinent est la minimisation de l'énergie élastique (voir par exemple [Ray10] et [RV10]).

### 3. Méthodes des *patches* et adaptation géométrique pour l'interaction fluide-structure

La méthode des *patches* [GHL<sup>+</sup>05], [PRR08] est une méthode de décomposition de domaine de type Schwarz avec recouvrement complet. Un patch est un sous-domaine  $\Omega \subset \mathcal{O}$  dans lequel on veut typiquement résoudre numériquement une EDP posée dans  $\mathcal{O}$  avec plus de précision dans  $\Omega$ . Le maillage du patch est généralement très fin par rapport au maillage du domaine  $\mathcal{O}$  qui est plutôt grossier. Il n'y a pas de conformité du maillage du patch  $\Omega$  avec celui du domaine global  $\mathcal{O}$ . Dans le cadre d'un problème d'interaction fluide-structure résolu avec une méthode "monobloc" utilisant un maillage fixe du domaine complet  $\mathcal{O}$ , l'idée est de positionner un patch autour de la structure (rigide ou déformable). Le but est de mieux prendre en compte la géométrie de la structure et d'améliorer la précision des calculs sans avoir à raffiner tout le maillage de  $\mathcal{O}$ . La méthode des patches est similaire à la méthode FAC (Fast Adaptive Composite Grid) [MR83], [MT86] et elle est également très proche de la méthode de Chimera [BLP01]. Elle a été étudiée essentiellement dans le cadre des

1. En d'autres termes, l'efficacité hydrodynamique est le rapport du travail utile et le travail total.

EDP elliptiques et en particulier pour l'équation de Poisson avec condition limite de Dirichlet sur le bord  $\partial\mathcal{O}$  d'un domaine  $\mathcal{O}$  :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u &= f & \text{dans } \mathcal{O} \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

On veut résoudre numériquement le problème (P) avec plus de précision dans un sous-domaine  $\Omega \subset \mathcal{O}$  (le patch). La méthode des patches est une méthode itérative qui consiste à déterminer à chaque itération  $n$ , une approximation  $u^n$  de la solution  $u$  de (P) à partir de l'approximation  $u^{n-1}$  de l'itération précédente. L'approximation  $u^n$  est calculée en résolvant successivement les deux problèmes suivants (voir [GHL<sup>+</sup>05]) :

$$(P_\Lambda) \begin{cases} -\Delta w &= f + \Delta u^{n-1} & \text{dans } \Omega \\ w &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On étend ensuite  $w$  à 0 en dehors du patch  $\Omega$  i.e.  $w = 0$  dans  $\overline{\mathcal{O}} \setminus \Omega$  et on détermine la valeur intermédiaire

$$u^{n-\frac{1}{2}} = u^{n-1} + \lambda w \quad \text{dans } \mathcal{O}. \quad (57)$$

Puis, on résout

$$(P_{\mathcal{O}}) \begin{cases} -\Delta \tilde{w} &= f + \Delta u^{n-\frac{1}{2}} & \text{dans } \mathcal{O} \\ \tilde{w} &= 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

$$u^n = u^{n-\frac{1}{2}} + \lambda \tilde{w}. \quad (58)$$

On choisit le paramètre  $\lambda \in (0, 2)$  pour assurer la convergence de la méthode (voir [GHL<sup>+</sup>05]).

D'un point de vue pratique, on résout le problème  $(P_{\mathcal{O}})$  avec un maillage "grossier"  $\mathcal{T}_H$  du domaine  $\mathcal{O}$  (par Eléments Finis, Volumes Finis, ...). On résout le problème  $(P_\Omega)$  avec un maillage "fin"  $\mathcal{T}_h$  du patch  $\Omega$  (avec  $h < H$ ).

**Méthode des patches pour Stokes.** Dans un premier temps, on se propose d'étudier une méthode des patches pour les équations de Stokes. Cette méthode s'inspire de la méthode des patches présentée dans [GHL<sup>+</sup>05] et [PRR08]. Le problème de Stokes s'écrit :

$$(P) \begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{dans } \mathcal{O} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{sur } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

On considère un patch  $\Omega \subset \mathcal{O}$  et on résout successivement les deux problèmes suivants :

$$(P_\Omega) \begin{cases} -\Delta \mathbf{w} + \nabla q &= \mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}^{n-1} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{w} &= \mathbf{0} & \text{dans } \overline{\mathcal{O}} \setminus \Omega. \end{cases}$$

On pose ensuite

$$\mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^{n-1} + \lambda \mathbf{w} \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad (59)$$

et on résout

$$(P_{\mathcal{O}}) \begin{cases} -\Delta \tilde{\mathbf{w}} + \nabla \tilde{q} &= \mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}} & \text{dans } \mathcal{O} \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}} &= 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ \tilde{\mathbf{w}} &= \mathbf{0} & \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

On détermine enfin

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n-\frac{1}{2}} + \lambda \tilde{\mathbf{w}} \quad \text{dans } \mathcal{O}. \quad (60)$$

On remarquera qu'il n'y a pas de correction sur la pression, celle-ci étant vraiment déterminée comme multiplicateur de Lagrange de la contrainte de divergence nulle. Par ailleurs, on peut montrer

(formellement) qu'une condition nécessaire sur  $\lambda$  pour que la suite des  $\mathbf{u}^n$  converge vers  $\mathbf{u}$  est que  $0 < \lambda < 2$ . On veut montrer rigoureusement la convergence de la suite  $\mathbf{u}^n$  vers la solution de  $(P)$ .

Les perspectives à plus long terme sont de construire et d'étudier une méthode des patches pour les équations de Navier-Stokes incompressibles en formulation Lagrangienne pour les termes d'inertie par une fonction caractéristique. Une des difficultés provient du fait que si à l'instant  $t_k$  on connaît une approximation  $\mathbf{u}_h^k$  et qu'on souhaite déterminer  $\mathbf{u}_h^{k+1}$  avec une bonne précision dans un patch  $\Omega$ , alors on aura besoin de connaître  $\mathbf{u}_h^k$  avec une bonne approximation, non pas dans  $\Omega$  mais dans  $\bar{\mathbf{X}}_h^k(\Omega)$  où  $\bar{\mathbf{X}}_h^k$  désigne la fonction caractéristique telle que  $\bar{\mathbf{X}}_h^k(\mathbf{x})$  est à la position à l'instant  $t_k$  d'une particule qui est  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t_{k+1}$ . Le schéma utilisant les patches doit tenir compte de cette difficulté.

Enfin, on s'intéressera à une méthode des patches combinée à une méthode des caractéristiques modifiées pour un système fluide-rigide avec les équations de Navier-Stokes. Une difficulté supplémentaire apparaît si l'on veut que le patch suive le déplacement de la structure dans le fluide.

**Adaptation de maillage.** Les méthodes "monobloc" décrites aux Chapitres 1 et 2 ont l'inconvénient (bien que convergeantes!) de ne pas prendre en compte de façon suffisamment précise la géométrie de la structure. On a vu (cf. Figures 1.3 et 1.4) que d'un point de vue numérique, un solide rigide est constitué d'un ensemble de triangles contenant strictement la structure réelle. Une alternative possible à la méthode des patches consiste à modifier le maillage localement au voisinage du solide à chaque itération en temps, de sorte que le bord du solide (considéré comme polygonal) coïncide exactement avec des arêtes du maillage modifié. La Figure 1 montre un exemple de ce type d'adaptation en dimension 2 d'espace.

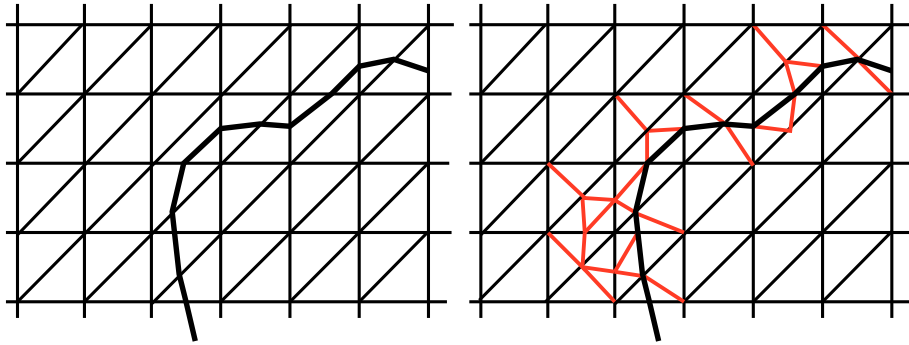


FIGURE 5 – Adaptation du maillage avec le bord d'une structure

En dimension 3 d'espace, si on utilise des Eléments Finis  $\mathbb{P}_2$ - $\mathbb{P}_1$  avec un maillage du domaine en tétraèdres, l'adaptation du maillage consiste à découper les tétraèdres qui rencontrent le bord de la structure de sorte que les faces des nouveaux tétraèdres ainsi introduits coïncident avec le maillage surfacique par des triangles du bord de la structure. Ces problèmes de découpes de tétraèdres ont été étudiés en particulier par Caboussat-Clausen-Rappaz [CCR12] (voir aussi [Flo13]). Ces procédures de découpes sont délicates à mettre en oeuvre avec une structure rigide ou déformable dimension 3 d'espace et ayant une géométrie un peu complexe.

#### 4. Estimations d'erreurs pour un problème de pénalisation des équations de Stokes avec un rigide

Dans le cadre d'interactions fluide-structure, les méthodes de pénalisations sont construites à partir d'une formulation globale (de ce fait elles font partie des méthodes "monobloc") et en pénalisant la partie structure par un terme dépendant d'un petit paramètre  $\epsilon$  (cf. [ABF99], [BCM10],

[JLM05]), Bost-Cottet-Maitre ont montré dans [BCM10] la convergence d'une méthode de pénalisation pour un système constitué d'un fluide visqueux incompressible avec un rigide en dimension 3 d'espace. Dans cet article, le système pénalisé conduit à un problème de transport pour une fonction de densité variable définie dans tout le domaine fluide-rigide. Essentiellement par des arguments de compacité, les auteurs établissent la convergence de la solution du problème pénalisé vers la solution du système fluide-rigide quand le paramètre de pénalisation  $\epsilon$  tend vers 0. En revanche, il n'y a pas d'estimation d'erreurs connue par rapport à  $\epsilon$ . L'objectif est d'établir une estimation d'erreurs en fonction du paramètre  $\epsilon$  pour un problème plus simple. Le problème considéré est un fluide de Stokes avec un solide rigide qui est une boule occupant le domaine  $B(t) \subset \mathbb{R}^2$  à l'instant  $t$  avec le centre de masse  $\xi(t)$ . Si on note  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$  le domaine global fluide-rigide, la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  du fluide vérifient (cf. Chapitre 1) :

$$(P) \begin{cases} 2 \int_{\mathcal{O}} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in K(t) \\ \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div}(\mathbf{u}) q d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in M(t) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \xi'(t), \quad p(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in B(t), \end{cases}$$

où  $K(t)$  (resp.  $M(t)$ ) désigne l'espace des fonctions rigides dans  $B(t)$  (resp. fonctions nulles dans  $B(t)$ ). Le problème (P) est équivalent au problème de minimisation

$$(M) \begin{cases} \mathbf{u} \in V \cap K(t) \\ J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in V \cap K(t)} J(\mathbf{v}), \end{cases} \quad (61)$$

où  $J(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{O}} D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$  et  $V$  est l'espace des fonctions de  $H_0^1(\mathcal{O})$  à divergence nulle. On pénalise (M) à travers le tenseur  $D(\mathbf{u})$  dans le rigide (pénalisation de type  $H^1$ ). On cherche alors  $\mathbf{u}_\epsilon$  vérifiant :

$$(M_\epsilon) \begin{cases} \mathbf{u}_\epsilon \in V \\ J_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) = \min_{\mathbf{v} \in V} J_\epsilon(\mathbf{v}), \end{cases} \quad (62)$$

où  $J_\epsilon(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) + \frac{1}{\epsilon} \int_{B_\epsilon(t)} D(\mathbf{u}_\epsilon) : D(\mathbf{v}) d\mathbf{x}$ . La position approchée  $\xi_\epsilon$  du centre de masse est calculée par la relation  $\xi'_\epsilon(t) = \frac{1}{|B_\epsilon(t)|} \int_{B_\epsilon(t)} \mathbf{u}_\epsilon(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ .

La pénalisation proposée avec  $(M_\epsilon)$  est différente de [BCM10] mais correspond à celle utilisée dans [JLM05]. On veut établir des estimations d'erreurs pour  $|\xi(t) - \xi_\epsilon(t)|$  et  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\epsilon\|$  en fonction de  $\epsilon$ , en considérant par exemple la norme sur  $L^\infty(0, T, L^2(\mathcal{O}))$ . Cette question est aussi liée à une estimation de dérivées de forme car on est amené à estimer des termes par exemple du type  $\int_{B(t)} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{B_\epsilon(t)} \mathbf{u}_\epsilon(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ . L'approche utilisée dans [JLM05] (voir aussi [Mau09]) est basée sur la minimisation de la fonctionnelle  $J_\epsilon$  et une estimation d'erreurs par rapport à  $\epsilon$  est établie dans le cas où les positions de  $B(t)$  et  $B_\epsilon(t)$  sont les mêmes, à chaque instant  $t$ . En revanche, il n'y a pas d'estimations d'erreurs connues entre (M) et  $(M_\epsilon)$ .

## 5. Optimisation de forme pour un système d'interaction fluide-structure

Ce thème de recherche porte sur un problème d'optimisation de forme pour un système d'interaction fluide-structure en dimension deux d'espace. Le fluide est modélisé par les équations de

Stokes couplé avec une structure gouvernée par l'élasticité linéaire. On cherche à déterminer la forme optimale de la structure élastique  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  pour minimiser une certaine fonctionnelle  $J(\Omega)$  qui dépend de la vitesse  $\mathbf{u}$  et de la pression  $p$  du fluide. Cette fonctionnelle peut-être une fonctionnelle d'énergie, une fonctionnelle de forme de type moindres carrés ou bien la trainée dans le fluide, etc. On doit pouvoir imposer également des contraintes sur la surface de la structure. On veut calculer la dérivée de forme de la fonctionnelle  $J(\Omega)$  ainsi que sa dérivée topologique. La dérivée de forme est utilisée pour faire évoluer la forme de la structure élastique vers la forme optimale tandis que la dérivée topologique fournit des indications sur l'endroit où il est plus avantageux d'introduire un trou dans la structure élastique. Ces deux dérivées peuvent alors être utilisées dans une méthode numérique de type *LevelSet* comme cela est proposé dans [7] et [5]. Le système considéré est stationnaire et en dimension deux d'espace. Grandmont [Gra02] a étudié l'existence de solution pour un tel système posé en dimension 3 d'espace. La structure élastique suit la loi de comportement de St Venant-Kirchhoff et le couplage avec le fluide se fait en imposant la continuité des forces de surface sur le bord de la structure. Mentionnons également le travail de Subulescu [Sur06] qui traite du même type de problème d'un écoulement de Stokes dans un cylindre élastique. Dans [Gra98], le système étudié est bidimensionnel, stationnaire et couple les équations de Stokes avec des équations de type poutre pour la structure. Citons enfin [DGHL04] (voir aussi [DGHL03]) où un système couplant les équations de Stokes d'évolution avec l'élasticité linéaire est étudié à travers un schéma de semi-discrétisation en Eléments Finis pour lequel des estimations d'erreurs sont obtenues.

Une difficulté - autant du point de vue de la modélisation que de l'analyse - vient du fait que les équations du fluide sont écrites de façon eulérienne alors que les équations de l'élasticité sont décrites dans un cadre lagrangien. Cette différence de formalisme constitue également une difficulté pour les calculs de la dérivée de forme et de la dérivée topologique.



# Bibliographie

- [ABB12] A. Agrachev, D. Barilari, and U. Boscain. On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 43(3-4) :355–388, 2012. (citation page 71 et 71).
- [ABF99] P. Angot, C.-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497–520, 1999. (citation pages 13 et 95).
- [ADH11] F. Alouges, A. Desimone, and L. Heltai. Numerical strategies for stroke optimization of axisymmetric microswimmers. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 21(2) :361–387, 2011. (citation page 65 et 65).
- [ADL08] F. Alouges, A. DeSimone, and A. Lefebvre. Optimal strokes for low Reynolds number swimmers : an example. *J. Nonlinear Sci.*, 18(3) :277–302, 2008. (citation pages 65, 66 et 93).
- [AS04] A. Agrachev and Y. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Control Theory and Optimization, II. (citation page 68).
- [BCM10] C. Bost, G.-H. Cottet, and E. Maitre. Convergence analysis of a penalization method for the three-dimensional motion of a rigid body in an incompressible viscous fluid. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(4) :1313–1337, 2010. (citation pages 13, 95, 96 et 96).
- [BGG00] R. Beals, B. Gaveau, and P.C. Greiner. Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 79(7) :633–689, 2000. (citation page 71 et 71).
- [BGL05] M. Benzi, G.H. Golub, and J. Liesen. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numerica*, 14 :1–137, 5 2005. (citation page 36).
- [BL05] P.I Bochev and R.B. Lehoucq. On the finite element solution of the pure Neumann problem. *SIAM Rev.*, 47(1) :50–66, 2005. (citation page 28).
- [Blo03] A.M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*, volume 24 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003. With the collaboration of J. Baillieul, P. Crouch and J. Marsden, With scientific input from P. S. Krishnaprasad, R. M. Murray and D. Zenkov, Systems and Control. (citation pages 67 et 69).
- [BLP01] F. Brezzi, J.-L. Lions, and O. Pironneau. Analysis of a chimera method. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332(7) :655 – 660, 2001. (citation page 93).



- 
- [BMMR97] K. Boukir, Y. Maday, B. Métivet, and E. Razafindrakoto. A high-order characteristics/finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 25(12) :1421–1454, 1997. (citation page 27).
  - [Bro82] R.W. Brockett. Control theory and singular Riemannian geometry. In *New directions in applied mathematics (Cleveland, Ohio, 1980)*, pages 11–27. Springer, New York, 1982. (citation pages 67 et 69).
  - [Cag86] G. Caginalp. An analysis of a phase-field model for free boundary. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 92 :205–245, 1986. (citation page 77 et 77).
  - [CC08] M. Coquerelle and G.-H. Cottet. A vortex level set method for the two-way coupling of an incompressible fluid with colliding rigid bodies. *J. Comput. Phys.*, 227(21) :9121–9137, 2008. (citation page 13).
  - [CCR12] A. Caboussat, P. Clausen, and J. Rappaz. Numerical simulation of two-phase flow with interface tracking by adaptive eulerian grid subdivision. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3–4) :490 – 504, 2012. (citation page 95).
  - [CFL14] S. Court, M. Fournié, and A. Lozinski. A fictitious domain approach for the stokes problem based on the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 74(2) :73–99, 2014. (citation page 13).
  - [Chi81] S. Childress. *Mechanics of swimming and flying*, volume 2 of *Cambridge Studies in Mathematical Biology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981. (citation pages 52, 55 et 65).
  - [CM06] G.-H. Cottet and E. Maitre. A level set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 16(3) :415–438, 2006. (citation page 13).
  - [CMM08] G.-H. Cottet, E. Maitre, and T. Milcent. Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 42(3) :471–492, 2008. (citation page 13).
  - [CWB98] J. Carling, T. Williams, and G. Bowtell. Self-propelled anguilliform swimming : simultaneous solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations and Newton’s laws of motion. *J.of Experimental Biology*, 201 :3143–3166, 1998. (citation page 50).
  - [DAL09] A. DeSimone, F. Alouges, and A. Lefebvre. Biological fluid dynamics, non-linear partial differential equations. In Robert A. Meyers (ed.), editor, *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, number SISSA ;21/2008/M, pages 548–554. Springer, 2009. (citation page 68).
  - [DE00] B. Desjardins and M.J. Esteban. On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(7-8) :1399–1413, 2000. (citation page 13).
  - [DGHL03] Q. Du, M.D. Gunzburger, L.S. Hou, and J. Lee. Analysis of a linear fluid-structure interaction problem. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 9(3) :633–650, 2003. (citation page 97).
  - [DGHL04] Q. Du, M.D. Gunzburger, L.S. Hou, and J. Lee. Semidiscrete finite element approximations of a linear fluid-structure interaction problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(1) :1–29, 2004. (citation page 97).

- 
- [DGN04] F. Duarte, R. Gormaz, and S. Natesan. Arbitrary Lagrangian-Eulerian method for Navier-Stokes equations with moving boundaries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(45-47) :4819–4836, 2004. (citation page 13).
- [EZ90] C.M. Elliott and Song Mu Zheng. Global existence and stability of solutions to the phase field equations. In *Free boundary value problems (Oberwolfach, 1989)*, volume 95 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 46–58. Birkhäuser, Basel, 1990. (citation page 77).
- [FGG01] C. Farhat, P. Geuzaine, and C. Grandmont. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids. *J. Comput. Phys.*, 174(2) :669–694, 2001. (citation page 13).
- [Flo13] S. Flotron. *Simulations numériques de phénomènes MHD-thermiques avec interface libre dans l'électrolyse de l'aluminium*. PhD thesis, SB, Lausanne, 2013. (citation page 95).
- [FN99] L. Formaggia and F. Nobile. A stability analysis for the arbitrary Lagrangian Eulerian formulation with finite elements. *East-West J. Numer. Math.*, 7(2) :105–131, 1999. (citation page 13).
- [Gas01] L. Gastaldi. A priori error estimates for the arbitrary Lagrangian Eulerian formulation with finite elements. *East-West J. Numer. Math.*, 9(2) :123–156, 2001. (citation page 13).
- [GGM01] C. Grandmont, V. Guimet, and Y. Maday. Numerical analysis of some decoupling techniques for the approximation of the unsteady fluid structure interaction. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 11(8) :1349–1377, 2001. (citation page 13).
- [GHL<sup>+</sup>05] R. Glowinski, J. He, A. Lozinski, J. Rappaz, and J. Wagner. Finite element approximation of multi-scale elliptic problems using patches of elements. *Numerische Mathematik*, 101(4) :663–687, 2005. (citation pages 93, 94, 94 et 94).
- [GLS00] M.D. Gunzburger, H.-C. Lee, and G.A. Seregin. Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions. *J. Math. Fluid Mech.*, 2(3) :219–266, 2000. (citation page 13).
- [GM00] C. Grandmont and Y. Maday. Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(3) :609–636, 2000. (citation page 13).
- [GPH<sup>+</sup>00] R. Glowinski, T.-W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, and J. Périaux. A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies : application to particulate flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 184(2-4) :241–267, 2000. Vistas in domain decomposition and parallel processing in computational mechanics. (citation page 13).
- [GPH<sup>+</sup>01] R. Glowinski, T.-W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, and J. Périaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : application to particulate flow. *J. Comput. Phys.*, 169(2) :363–426, 2001. (citation page 13).
- [GR79] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1979. (citation pages 17, 17 et 19).

- 
- [Gra98] C. Grandmont. Existence et unicité de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel stationnaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 326(5) :651 – 656, 1998. (citation page 97).
  - [Gra02] C. Grandmont. Existence for a three-dimensional steady state fluid-structure interaction problem. *J. Math. Fluid Mech.*, 4(1) :76–94, 2002. (citation page 97).
  - [Gun96] M.D. Gunzburger. Navier-Stokes equations for incompressible flows : finite-element methods. In *Handbook of computational fluid mechanics*, pages 99–157. Academic Press, San Diego, CA, 1996. (citation page 27).
  - [GW08] A. Gerstenberger and W.A. Wall. An extended finite element method/Lagrange multiplier based approach for fluid-structure interaction. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197(19-20) :1699–1714, 2008. (citation page 13).
  - [HB65] J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds number hydrodynamics : with special applications to particulate media*. Prentice-Hall international series in the physical and chemical engineering sciences. Prentice-Hall, 1965. (citation pages 67 et 68).
  - [HSV95] R. Hartl, S. Sethi, and R. Vickson. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Rev.*, 37(2) :181–218, 1995. (citation page 71).
  - [IT79] A.D. Ioffe and V.M. Tihomirov. *Theory of extremal problems*, volume 6 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979. (citation page 71).
  - [JLM05] J. Janela, A. Lefebvre, and B. Maury. A penalty method for the simulation of fluid-rigid body interaction. In *CEMRACS 2004—mathematics and applications to biology and medicine*, volume 14 of *ESAIM Proc.*, pages 115–123. EDP Sci., Les Ulis, 2005. (citation pages 13, 96, 96 et 96).
  - [Kes01] D. Kessler. Sharp interface limits of a thermodynamically consistent solutal phase-field model. *J. Crystal Growth*, 224 :175–186, 2001. (citation pages 77 et 79).
  - [Lad69] O.A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969. (citation page 44).
  - [Lau97] Ph. Laurençot. Weak solutions to a phase-field model with non-constant thermal conductivity. *Quart. Appl. Math.*, 55(4) :739–760, 1997. (citation pages 77 et 80).
  - [Lig52] M.J. Lighthill. On the squirring motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5 :109–118, 1952. (citation page 65).
  - [Lig75] M.J. Lighthill. *Mathematical biofluidynamics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1975. (citation pages 52, 55 et 65).
  - [LK99] H. Liu and K. Kawachi. A numerical study of undulatory swimming. *J. of Computational physics*, 155 :223–247, 1999. (citation page 50).
  - [LM14] J. Lohéac and A. Munnier. Controllability of 3D low Reynolds number swimmers. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 20(1) :236–268, 2014. (citation page 66).
  - [Loh12] J. Lohéac. *Contrôle en temps optimal et nage à bas nombre de Reynolds*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2012. (citation page 92).

- 
- [LP09] E. Lauga and T.R. Powers. The hydrodynamics of swimming microorganisms. *Reports on Progress in Physics*, 72(9) :096601, 2009. (citation page 68).
  - [LV05] A. Leroyer and M. Visonneau. Numerical methods for ranse simulations of a self-propelled fish-like body. *Journal of Fluids and Structures*, 20 :975–991, 2005. (citation pages 50 et 52).
  - [Mau96] B. Maury. Characteristics ALE method for the 3D Navier-Stokes equations with a free surface. *Int. J. Comp. Fluid Dyn.*, 6 :175–188, 1996. (citation page 13).
  - [Mau09] B. Maury. Numerical analysis of a finite element/volume penalty method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2) :1126–1148, 2009. (citation page 96).
  - [MG97] B. Maury and R. Glowinski. Fluid-particle flow : a symmetric formulation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(9) :1079–1084, 1997. (citation page 13).
  - [MI05] R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods. In *Annual review of fluid mechanics. Vol. 37*, volume 37 of *Annu. Rev. Fluid Mech.*, pages 239–261. Annual Reviews, Palo Alto, CA, 2005. (citation page 13).
  - [ML10] S. Michelin and E. Lauga. Efficiency optimization and symmetry-breaking in a model of ciliary locomotion. *Physics of fluids*, 22 :111901, 2010. (citation pages 65, 66 et 93).
  - [MR83] S. McCormick and J. Ruge. Unigrid for multigrid simulation. *Math. Comp.*, 41(43-62), 1983. (citation page 93).
  - [MT86] S. McCormick and J. Thomas. The fast adaptive composite grid method (fac) for elliptic boundary value problems. *Math Comp.*, 46 :439–456, 1986. (citation page 93).
  - [Mül03] U. K. Müller. Fish’n flag. *Science*, 302(5650) :1511–1512, 2003. (citation page 55 et 55).
  - [Pes02] C.S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numer.*, 11 :479–517, 2002. (citation page 13).
  - [Pir73] O. Pironneau. On optimum profiles in Stokes flow. *J. Fluid Mech.*, 59 :117–128, 1973. (citation page 65).
  - [Pir74] O. Pironneau. On optimum design in fluid mechanics. *J. Fluid Mech.*, 64 :97–110, 1974. (citation page 65).
  - [Pir82] O. Pironneau. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 38(3) :309–332, 1982. (citation pages 15, 18 et 20).
  - [Pir10] O. Pironneau. Finite element characteristic methods requiring no quadrature. *J. Sci. Comput.*, 43(3) :402–415, 2010. (citation page 20).
  - [PK74] O. Pironneau and D.F. Katz. Optimal swimming of flagellated micro-organisms. *Journal of Fluid Mechanics*, 66 :391–415, 11 1974. (citation page 65).
  - [PLT92] O. Pironneau, J. Liou, and T. Tezduyar. Characteristic-Galerkin and Galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equations with time-dependent domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 100(1) :117–141, 1992. (citation page 20).
  - [PRR08] M. Picasso, J. Rappaz, and V. Rezzonico. Multiscale algorithm with patches of finite elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(6) :477–491, 2008. (citation pages 93 et 94).

- 
- [PT05] C. Prieur and E. Trélat. Robust optimal stabilization of the Brockett integrator via a hybrid feedback. *Math. Control Signals Systems*, 17(3) :201–216, 2005. (citation page 71).
  - [Pur77] E. M. Purcell. Life at low Reynolds number. *American Journal of Physics*, 45 :3–11, June 1977. (citation page 68).
  - [Ray10] J.-P. Raymond. Feedback stabilization of a fluid-structure model. *SIAM J. Control Optim.*, 48(8) :5398–5443, 2010. (citation page 93).
  - [RV10] J.-P. Raymond and M. Vanninathan. Null controllability in a fluid-solid structure model. *J. Differential Equations*, 248(7) :1826–1865, 2010. (citation page 93).
  - [Si12] Zhiyong Si. Second order modified method of characteristics mixed defect-correction finite element method for time dependent navier–stokes problems. *Numerical Algorithms*, 59(2) :271–300, 2012. (citation page 27).
  - [SMST02] J. San Martín, V. Starovoitov, and M. Tucsnak. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 161(2) :113–147, 2002. (citation page 13).
  - [SMTT07] J. San Martín, T. Takahashi, and M. Tucsnak. A control theoretic approach to the swimming of microscopic organisms. *Quart. Appl. Math.*, 65(3) :405–424, 2007. (citation page 65 et 65).
  - [Spa02] J.A. Sparenberg. Survey of the mathematical theory of fish locomotion. *Journal of Engineering Mathematics*, 44(4) :395–448, 2002. (citation page 55).
  - [Sül88] E. Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 53(4) :459–483, 1988. (citation pages 15, 20 et 92).
  - [Sur06] C. Surulescu. On the stationary motion of a Stokes fluid in a thick elastic tube : a 3D/3D interaction problem. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 75(1) :95–106, 2006. (citation page 97).
  - [SW89] A. Shapere and F. Wilczek. Efficiencies of self-propulsion at low Reynolds number. *J. Fluid. Mech.*, 198 :587–599, 1989. (citation pages 65, 66, 67, 68, 69 et 93).
  - [Tak03] T. Takahashi. Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain. *Adv. Differential Equations*, 8(12) :1499–1532, 2003. (citation pages 13, 14 et 16).
  - [Tay51] G. Taylor. Analysis of the swimming of microscopic organisms. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 209 :447–461, 1951. (citation page 65).
  - [Tem83] R. Temam. *Problèmes mathématiques en plasticité*. Gauthier-Villars, Montrouge, 1983. (citation page 15).
  - [TT95] M. Triantafyllou and G. Triantafyllou. An efficient swimming machine. *Scientific american*, 272(3) :64–71, 1995. (citation pages 56, 57 et 57).
  - [TT04] T. Takahashi and M. Tucsnak. Global strong solutions for the two-dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid. *J. Math. Fluid Mech.*, 6(1) :53–77, 2004. (citation page 13).

- [WB95] J.A. Warren and W.J. Boettinger. Prediction of dendritic growth and microsegregation patterns in a binary alloy using the phase-field model. *Acta metall. mater.*, 43(2) :689–703, 1995. (citation pages 77 et 79).